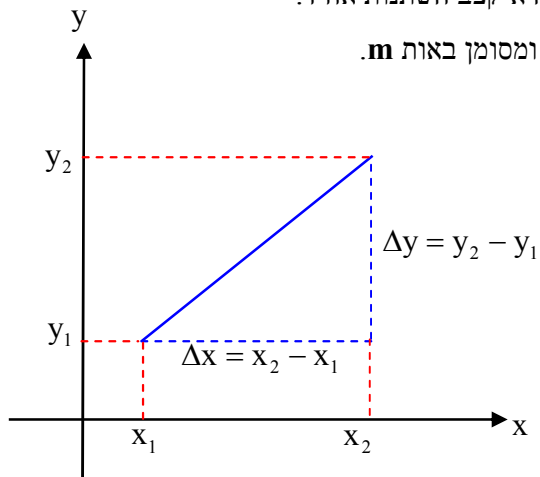


הקו הישר

תזכורת: פונקציה-קווית, היא פונקציה שהתכונה המאפיינת אותה, היא קצב השתנות אחיד.

השינוי במספר יחידות ה-y על כל יחידה חיובית של x, נקרא **שיפוע** ומסומן באות **m**.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

כאשר השיפוע **m** חיובי הפונקציה הקווית עולה.

כאשר השיפוע **m** שלילי הפונקציה הקווית יורדת.

כאשר השיפוע **m** הוא אפס הפונקציה הקווית קבועה.

כל הפונקציות הקוויות ניתנות לייצוג באמצעות משוואה מהצורה **$y = mx + b$**

הפרמטר **b**, המקדם החופשי בפונקציה הקווית, הוא ערך הפונקציה כאשר $x = 0$, כלומר בנקודת החיתוך של הישר עם

ציר ה-y בייצוג הגרפי. שיעורי נקודה זו הם: **(0,b)**

* שיפועו של ישר המקביל לציר x הוא 0, ולכן משוואתו היא $y = b$ (לכל הנקודות עליו שיעור y זהה)

* ישר שמקביל לציר y איננו גרף של פונקציה, ומשוואתו: $x = m$ (לכל הנקודות עליו שיעור x זהה)

מצבים הדדיים אפשריים בין שני ישרים

קיימים שלושה מצבים הדדיים אפשריים בין שני ישרים באותו מישור:

ישרים נחתכים	ישרים מתלכדים	ישרים מקבילים

הקבלה: שני ישרים מקבילים אם ורק אם שיפועיהם שווים.

לישרים מקבילים אין אף נקודה משותפת.

התלכדות: אפשר לראות את ההתלכדות כמקרה פרטי של הקבלה.

לישרים מתלכדים יש אינסוף נקודות משותפות.

חיתוך: שני ישרים נחתכים, אם ורק אם שיפועיהם שונים.

לשני ישרים נחתכים יש רק נקודה אחת משותפת.

תרגילים

- מבין הישרים הבאים, מצא אילו מתלכדים ואילו מקבילים:
 - $2y + 10x = 2$
 - $y = -5x + 1$
 - $y + 2x = 10$
 - $-y = 5x$
 - $5x + 5y = 2$
 - $x + \frac{y}{5} = 3$
 - $x = -4$
 - $x = 1$
 - $y = -1$
 - $y = x + 6$
- קבע איזה מרובע כולאים ארבעת הישרים: $x = -4$, $x = 1$, $y = -1$, $y = x + 6$.
- הנקודות: $A(-3,7)$, $B(-1,2)$, $C(5,2)$, $D(1,12)$ הן קודקודי מרובע.
 - מצא את משוואות שיפועי ארבע צלעות המרובע.
 - קבע איזה מרובע הוא ABCD.
- נתון הישר: $(a-5)x + (a+1)y = a$

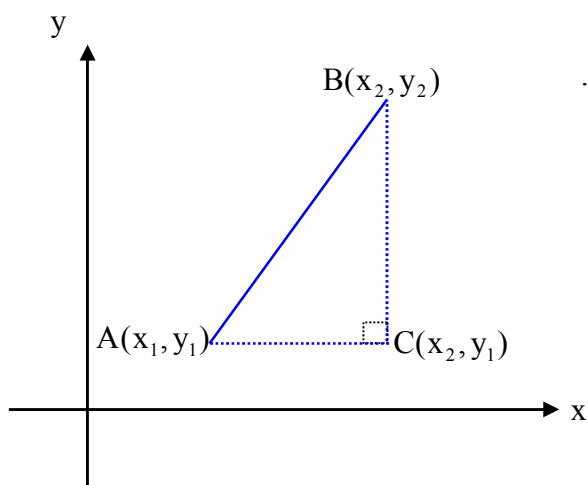
מצא לאילו ערכים של a הישר הזה:

 - מקביל לציר x .
 - מקביל לציר y .
 - עובר דרך הראשית.
 - חוצה את הזווית בין שני הצירים.
 - עובר דרך הנקודה $(0, -1)$.
 - מקביל לישר $3x - y = 6$.
- צלעותיו של משולש מונחות על שני הצירים ועל הישר: $(a+2)x + (a-1)y = a^2 + a - 2$.

בטא בעזרת a את שטח המשולש.

מרחק בין שתי נקודות

תזכורת: לכל הנקודות הנמצאות על ישר מקביל לציר x יש שיעור y זהה, לכל הנקודות הנמצאות על ישר מקביל לציר y יש שיעור x זהה.



הן שתי נקודות כלשהן הנתונות במערכת הצירים. $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$.

בנית עזר: BC מקביל לציר y , AC מקביל לציר x .

$\angle ACB = 90^\circ$ וכן $C(x_2, y_1)$. (הסבר מדוע)

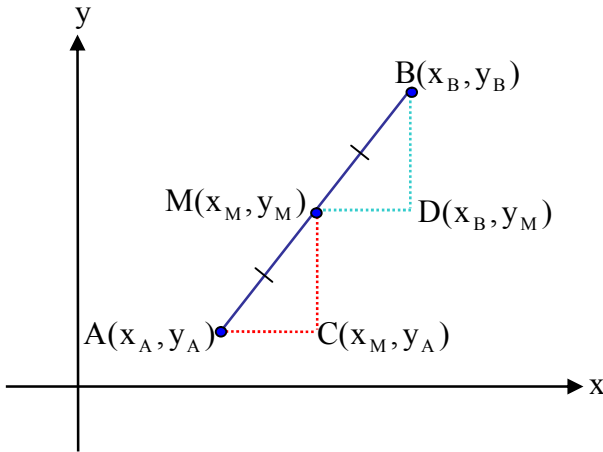
$AC = x_2 - x_1 = \Delta x$, $BC = y_2 - y_1 = \Delta y$

לפי משפט פיתגורס: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

אמצע קטע



הנקודות $A(x_A, y_A)$ ו- $B(x_B, y_B)$ הן קצות קטע על ישר כלשהו.

הנקודה $M(x_M, y_M)$ נמצאת באמצע הקטע.

על ידי סימון המדרגה בין A ל- M , ובין M ל- B , מתקבלים שני משולשים חופפים. (מדוע?)

לכן: $AC=MD$, $CM=DB$

לפיכך: $x_B - x_M = x_M - x_A \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

וכן: $y_B - y_M = y_M - y_A \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

ניתן להשתמש בנוסחה:

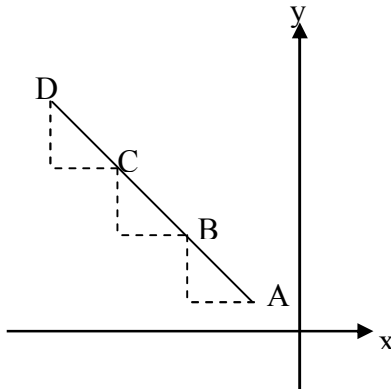
דוגמה:

הנקודות C ו- D , מחלקות את הקטע AB

לשלושה חלקים שווים ($AB=BC=CD$).

נתון: $A(-2,1)$ $C(-8,7)$

חשב את שיעורי הנקודות B ו- D .



חישוב שיעורי B

א. לפי הנוסחה: $x_B = \frac{(-8) + (-2)}{2} = -5$, $y_B = \frac{7+1}{2} = 4$

ב. לפי השוואת אורכי הקטעים:

$$x_B - x_A = x_C - x_B \Rightarrow x_B - (-2) = (-8) - x_B \Rightarrow x_B = \frac{(-8) + (-2)}{2} = -5$$

$$y_B - y_A = y_C - y_B \Rightarrow y_B - 1 = 7 - y_B \Rightarrow y_B = \frac{7+1}{2} = 4$$

חישוב שיעורי D

א. לפי הנוסחה: C אמצע BD : $7 = \frac{4+y_D}{2} \Rightarrow y_D = 10$, $-8 = \frac{-5+x_D}{2} \Rightarrow x_D = -11$

ב. לפי השוואת אורכי הקטעים:

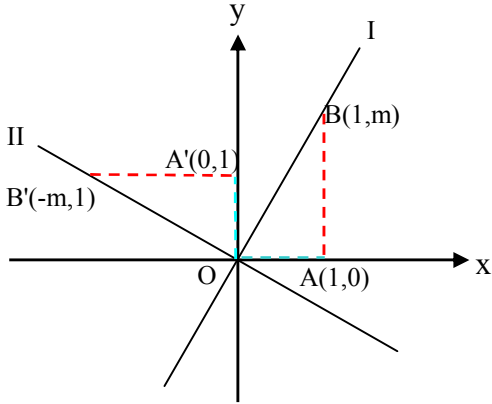
$$x_C - x_B = x_D - x_C \Rightarrow -8 - (-5) = x_D - (-8) \Rightarrow x_D = -11$$

$$y_C - y_B = y_D - y_C \Rightarrow 7 - 4 = y_D - 7 \Rightarrow y_D = 10$$

תרגילים

6. נתונות הנקודות: $A(4,14)$, $B(7,3)$, $C(-2,-4)$, $D(-5,7)$.
א. באילו דרכים אפשר להוכיח ש- $ABCD$ מעוין? הסבר במילים.
ב. הוכח כי $ABCD$ מעוין בשתי דרכים שונות.
7. הצלעות של מלבן $ABCD$ מקבילות לצירים. M היא נקודת המפגש של אלכסוני המלבן.
נתון: $M(6,8)$, $B(9,12)$.
א. מצא את שיעורי הקודקוד D (הנמצא על האלכסון BD).
ב. רשום את שיעורי הקודקודים A ו- C .
ג. רשום את משוואות הצלעות של המלבן.
8. במקבילית $ABCD$ נתונים הקודקודים $A(2,2)$, $B(7,3)$, $D(0,5)$.
א. מצא את נקודת הפגישה של אלכסוני המקבילית.
ב. חשב את שיעורי הקודקוד C .
9. נתונים קודקודי המשולש ABC : $A(5,2)$, $B(-7,-2)$, $C(5,-6)$.
א. מצא את משוואת התיכון לצלע BC . בדוק את תשובתך בעזרת שרטוט!
ב. מצא את שיעורי נקודת מפגש התיכונים.
10. שלושה קודקודים של משולש הם: $A(2,6)$, $B(10,0)$, $C(0,0)$.
א. נקודה E היא אמצע AC , נקודה F היא אמצע BC . מצא את שיעורי E ו- F .
ב. חשב את אורך הצלע AB ואת אורך הקטע EF . מה מסקנתך? הסבר.
11. שני קודקודים של משולש נמצאים בנקודות $A(7,-1)$ ו- $B(1,-1)$. שטח המשולש הוא 30 יח"ר.
א. מצא את שיעורי הקודקוד C , אם נתון שהוא מונח על ציר y . העזר בשרטוט. כמה פתרונות לבעיה?
ב. רשום שיעורי נקודה נוספת אפשרית ל- C (שלא על ציר y), אם נתון ששטח המשולש הוא 30 יח"ר.

ישרים מאונכים

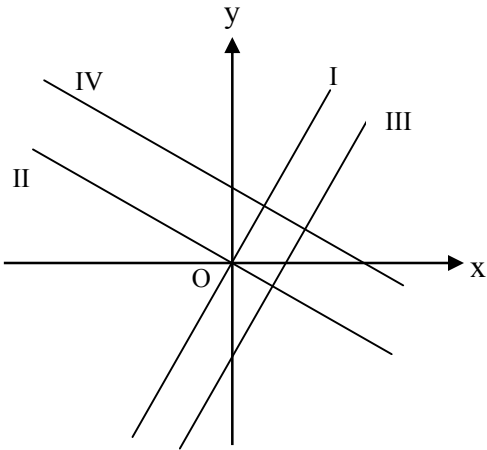


ישר I עובר דרך ראשית הצירים ושיפועו הוא m .
 לפיכך משוואתו היא: $y = mx$.
 הקטע BA מקביל לציר y ובמרחק יחידה אחת ממנו.
 לכן שיעורי הנקודה B הם: $(1, m)$. (מדוע?)
 ישר II ששיפועו m' , מאונך לישר I ועובר
 דרך ראשית הצירים.

כדי למצוא את שיפועו m' , נעביר קטע מקביל לציר x דרך הנקודה $A'(0,1)$.
 המשולשים OAB ו- $OA'B'$ חופפים (מדוע?).
 שים לב: "רוחב" המדרגה ו"גובה" המדרגה החליפו תפקידים בשני המשולשים.
 שיעורי הנקודה B' הם לפיכך: $(-m, 1)$.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad . \quad \text{לכן שיפועו של הישר הניצב הוא: } m' = \frac{1-0}{-m-0} = -\frac{1}{m}$$

$$m \cdot m' = m \cdot \left(-\frac{1}{m}\right) = -1$$



הישר I עובר דרך ראשית הצירים ושיפועו m .
 הישר III מקביל לישר I. מהו שיפועו?
 הישר II עובר דרך ראשית הצירים ושיפועו m' .
 הישר IV מקביל לישר II. מהו שיפועו?
 מהי מכפלת השיפועים של הישרים I ו-III?
 מהי מכפלת השיפועים של הישרים III ו-IV?

לכן, הכלל הנ"ל, נכון גם לישרים מאונכים זה לזה
 שאינם עוברים דרך ראשית הצירים.

מכפלת השיפועים של שני ישרים מאונכים זה לזה היא -1.

תרגילים

12. נתון משולש שקודקודיו הם: $C(8,0)$, $B(0,6)$, $A(3,10)$.

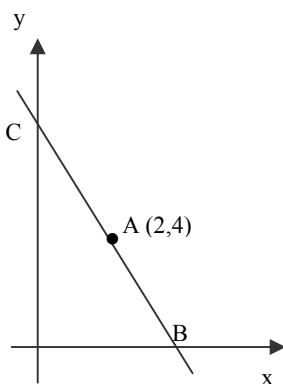
- א. הוכח כי המשולש ישר זווית. באיזו דרך נוספת ניתן להוכיח זאת?
- ב. מצא את משוואת הגובה ליתר.

13. נתונים הישרים $y = -2x + 2$, $y = ax - 3$.

- א. מהו ערכו של הפרמטר a אם נתון שהישרים מאונכים זה לזה?
- ב. רשום משוואות של שני ישרים נוספים, שייצרו עם הישרים הנתונים מלבן. העזר בשרטוט.

14. משולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$). נתון: $A(0,4)$, $B(2,8)$ והקודקוד C נמצא על ציר x .

- א. מצא את שיעורי הקודקוד C .
- ב. חשב את שטח המשולש.
- ג. מצא את משוואת התיכון ליתר BC .



15. קו ישר בעל שיפוע שלילי, עובר דרך הנקודה $A(2,4)$,

חותך את ציר ה- x בנקודה B ואת ציר ה- y בנקודה C .

ידוע שהנקודה A נמצאת בדיוק באמצע הקטע BC .

- א. מצא את משוואת הישר BC .
- ב. האנך האמצעי לקטע BC חותך את ציר ה- x בנקודה D . מהם שיעורי הנקודה D ?

16. אחד מקודקודי ריבוע הוא $A(0,5)$. המשוואה של אחד מאלכסוני הריבוע היא $y = 2x$.

- א. מצא את משוואת האלכסון השני של הריבוע.
- ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של האלכסונים.
- ג. חשב את שטח הריבוע.
- ג. מצא את שאר שיעורי הקודקודים של הריבוע.

17. במקבילית $ABCD$ נתונים 3 קודקודים: $A(0,0)$, $B(1,t)$, $D(t,1)$, כאשר $t > 1$.

- א. מצא את משוואות האלכסונים AC ו- BD .
- ב. מצא את שיעורי הקודקוד C .
- ג. הוכח שהמקבילית היא מעוין.
- ד. מצא את שטחה של המקבילית- בטא בעזרת t .

18. במעוין ABCD האלכסון AC מונח על הישר $y = 2x - 8$, והצלע AB מונחת על הישר $y = -8x + 2$. אלכסוני המעוין נחתכים על ציר ה-x.

- מצא את שיעורי קודקוד A.
- מצא את משוואת האלכסון השני.
- מצא את שיעורי קודקודי המעוין.

19. נתון משולש OAB שקודקודיו הם: $O(0,0)$, $A(t,1)$, $B(1,t)$.

- הסבר מדוע חייב להתקיים $t \neq \pm 1$.
- הוכח שהמשולש הוא שווה שוקיים (לכל $t \neq \pm 1$).
- האם המשולש יכול להיות ישר זווית? אם כן, מצא את ערכו של t שיתאים למצב זה. אם לא - נמק!
- מצא את שני ערכי t עבורם המשולש הוא שווה צלעות.

תשובות / פתרונות חלקיים / הדרכה

4. א. מקביל לציר x - המקדם של x מתאפס, כלומר: $a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 6y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{6}$
- ב. מקביל לציר y - המקדם של y מתאפס, כלומר: $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -6x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$
- ג. עובר דרך הראשית - נציב 0 במקום x ו-y ונקבל: $a = 0$
- ד. חוצה את הזווית בין שני הצירים, הכוונה שהישר יוצר זווית של 45° או של -45° , עם ציר ה-x, כלומר השיפוע הוא 1 או -1.

$$\boxed{y = -\frac{a-5}{a+1}x + \frac{a}{a+1}} \text{ :נסדר את המשוואה בצורה מפורשת:}$$

$$y = x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow \frac{-a+5}{a+1} = 1 \quad \text{אם השיפוע הוא 1:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a+5}{a+1} = -1 \quad \text{אם השיפוע הוא -1: אין פתרון}$$

$$y = 3x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-a+5}{a+1} = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 6 \quad \text{או} \quad 3x - y = 6 \quad \text{ה. מקביל לישר}$$

$$y = 11x - 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} = -1 \Leftrightarrow b = -1 \quad \text{אז } (0, -1) \quad \text{אם הישר עובר דרך}$$

5. תשובה: $S = \frac{(a+2)(a-1)}{2}$, $a \neq -2$, $a \neq 1$

12. ב. $y = \frac{1}{2}x + 6$

14. א. AB: $y = 2x + 4 \Leftrightarrow b = 4$, $m_{AB} = \frac{8-4}{2-0} = 2$

השיפוע של AC הוא $-\frac{1}{2}$: $y = -\frac{1}{2}x + 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}$ ולכן $C(8,0)$

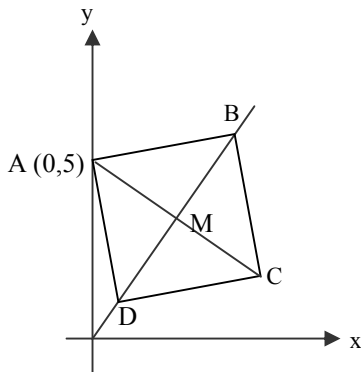
ב. $AB = \sqrt{(8-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$

$AC = \sqrt{(4-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{80}$

$S = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{80}}{2} = 20$

ג. שיעורי נקודת אמצע BC הם: $(5, 4)$ שיעורי A הם: $(0, 4)$, השיפוע $= 0$ ולכן משוואת התיכון: $y = 4$.

15. א. $y = -2x + 8$ ב. משוואת האנך האמצעי: $y = \frac{1}{2}x + 3$ ונקודת החיתוך: $(-6,0)$



16. הנקודה הנתונה לא נמצאת על האלכסון הנתון- בדיקה ע"י הצבה.

א. האלכסונים מאונכים זה לזה.

שיפוע האלכסון הוא $-\frac{1}{2}$. משוואת האלכסון השני $y = -\frac{1}{2}x + 5$

ב. M הנקודה המשותפת - פתרון המערכת:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 4 \Rightarrow M(2,4)$$

ג. $AB^2 = AM^2 + MB^2 = 10 = S_{ABCD}$ $AM = \sqrt{(5-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} = MB$

ד. שיעורי C לפי אמצע קטע: $C(4,3)$

הנקודות B ו-D נמצאות על הישר $y = 2x$ ובמרחק $\sqrt{5}$ מהנקודה M.

נסמן נקודה על ישר זה: $(x, 2x)$. מתקיים: $\sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2} = \sqrt{5}$

מפתרון המשוואה הריבועית: $(x-2)^2 + (2x-4)^2 = 5$, נקבל: $x=1$ או $x=3$.

ולכן: $B(1,2)$, $D(3,6)$

17. א. נתון: $B(1,t)$, $D(t,1)$. שיפוע הישר דרכן: $t \neq 1$, $m_{BD} = \frac{t-1}{1-t} = -1$.

נציב ונמצא את b : $t = -1 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = t + 1 \Leftrightarrow y = -x + (t+1)$ BD:

AM מאונך ל-BD ולכן שיפוע $AM = 1$, משוואת AM: $y = x$

ב. נסמן ב-M את נקודת מפגש האלכסונים. היא אמצע הקטע BD. $x_M = \frac{t+1}{2}$, $y_M = \frac{t+1}{2}$.

$M\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t+1}{2}\right)$ היא גם אמצע הקטע AC, לכן: $C(t+1, t+1)$

ג. מצאנו ששיפוע AC הוא 1, ושיפוע BD הוא -1, לכן הם מאונכים ולכן המקבילית היא מעוין.

ד. נמצא את אורכי האלכסונים ואת השטח:

$$AC = \sqrt{(t+1-0)^2 + (t+1-0)^2} = \sqrt{2(t+1)^2} = \sqrt{2} \cdot (t+1)$$

$$BD = \sqrt{(t-1-0)^2 + (1-t-0)^2} = \sqrt{2(t-1)^2} = \sqrt{2} \cdot (t-1)$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (t+1) \cdot \sqrt{2} \cdot (t-1)}{2} = t^2 - 1 \quad (t > 1)$$

18. את נקודה A נמצא ע"י חיתוך בין AC ו-AB.

$$\begin{cases} y = 2x - 8 \\ y = -8x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -6 \Rightarrow A(1, -6)$$

נסמן את נקודת החיתוך של האלכסונים ב-M, הנמצאת על ציר x, כלומר: $0 = 2x - 8$, לכן $M(4, 0)$.

M אמצע AC. לכן: $C(7, 6)$.

האלכסון BD עובר דרך M ומאונך ל-AC, לכן שיפועו $-\frac{1}{2}$ ומשוואתו $y = -\frac{1}{2}x + 2$

נסמן את שיעורי הנקודות B ו-D הנמצאות על ישר זה: $\left(t, -\frac{1}{2}t + 2\right)$

אורך חצי אלכסון הוא: $AM = \sqrt{(1-4)^2 + (6+0)^2} = \sqrt{45} = MC = BM = DM$

$$BM = DM = \sqrt{45} = \sqrt{(t-4)^2 + \left(-\frac{1}{2}t + 2 - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}(t-4)^2}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{(t-4)^2 + \left(-\frac{1}{2}t + 2 - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}(t-4)^2}$$

$$\frac{5}{4}(t-4)^2 = 45 \Rightarrow (t-4)^2 = 36 \Rightarrow t = 10, t = -2$$

שיעורי הנקודות הן: $B(-2, 3)$, $C(10, -3)$

19. ג. $AO=OB$ השוקיים על הצירים, לכן $t=0$.

$$AB = AO = BO \Rightarrow \sqrt{(t-1)^2 + (1-t)^2} = \sqrt{t^2 + 1^2} \quad .7$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$$