

מאגר שאלות לא שגרתיות לפי נושאים

הקדמה: מבנה בחינות רצוי שיהיה במתכונת הבאה:

60% - שאלות דומות לאלה שנפתרו בכיתה ובשיעורי הבית.

20% - שאלות ברמת קושי גבוהה יותר, אך במבנה מוכר.

20% - שאלות "לא צפויים". הכוונה לשאלות שונות מאלה

שהתלמיד ראה.

מאגר זה, מכיל שאלות לדוגמה עבור 20% ה"לא צפויים", לתלמידי 5 י"ל.

ככלל, שאלות שאינן צפויים, אינן בהכרח קשות יותר. הבעיה בשאלות אלה

היא שהן מציגות לתלמיד אתגר שונה ולא מוכר.

סדרות:

1. נתון: א. המספרים $a+b, a-2b, 3a+b$ הם שלושה איברים ראשונים בסדרה

חשבונית.

ב. למשוואה $(a-3b-4)x^2 + 2(a-b)x + 2a+b+3=0$ יש פתרון יחיד

כאשר: $a-3b \neq 4, a > 0$.

מצאו: א. a, b והפרש הסדרה.

ב. את הפתרון היחיד.

2. הוכיחו כי אם אורכי צלעות במשולש יוצרים סדרה הנדסית שמנתה q , אז

היא מקיימת:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

3. הוכיחו כי אם בסדרה חשבונית מתקיים: $\frac{S_M}{S_N} = \frac{M^2}{N^2}$

לכל M, N טבעיים, אז: $\frac{a_M}{a_N} = \frac{2M-1}{2N-1}$

טריגונומטריה:

1. במשולש שווה שוקיים, אורך הבסיס $2m$ ואורך השוק a . רדיוס המעגל החסום במשולש הוא r . הוכיחו כי מתקיים השוויון:

$$\frac{r^2}{m^2} = \frac{a-m}{a+m}$$

2. הוכיחו כי בכל משולש שצלעותיו a, b, c והזוויות α, β מונחות מול הצלעות a, b בהתאמה, מתקיים:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{c^2}{a^2 - b^2} \sin(\alpha - \beta)$$

מרוכבים:

1. נתונה המשוואה: $4Z^4 - 12Z^3 + 17Z^2 - 10Z + 2 = 0$

א. האם Z המקיים $Z^2 = 2i$ והוא נמצא ברביע ראשון, הוא אחד משרשי המשוואה?

ב. האם \bar{Z} הוא אחד משרשי המשוואה?

ג. מצאו את כל שורשי המשוואה.

גיאומטריה אנליטית:

1. מצאו את המקום הגיאומטרי של קודקוד C במשולש ABC אם ידוע:

$$A(a,0) \quad B(-a,0) \quad a>0 \quad \angle A=2\angle B$$

2. המעגל $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ חותך את הצירים בנקודות S, R, Q, P . הוכיחו כי כל המיתרים, שאינם קוטר, המחברים שתיים מהנקודות הנ"ל,

$$\text{משיקים לאליפסה שמשוואתה: } \frac{x^2}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

מעריכיות:

1. פתרו את אי-השוויון הבא: $x^{2x} < x < x^{x^2}$

2. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^2-9} + e^{9-x^2}$. הוכיחו כי $f(x) \geq 2$ לכל x .

דיפרנציאלים:

1. לפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 - 3x^2 - cx + 4}{x^2 - bx - 3}$

יש אסימפטוטה אנכית יחידה $x=3$ ונקודת חיתוך יחידה עם ציר ה- x . מצאו את a, b, c אם ידוע $a, b, c > 0$.

2. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + x - A}{x^2 - x + A}$

- א. לאילו ערכים של A הפונקציה מוגדרת לכל x ?
 ב. הראו כי עבור הערכים של A שהתקבלו בסעיף א מתקיים:
 $f(x) \geq -1$ לכל x .

3. נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2}{ax^2 + bx + c}$

- א. מה ניתן לומר על סימנו של c אם נתון כי לפונקציה יש נקודת מקסימום
 ב: $(0,0)$.

- ב. הוכיחו שאם נתון גם כי $a > 0$, הרי לפונקציה יש שתי אסימפטוטות
 מאונכות לציר x .

- ג. על-סמך סעיפים א ו-ב, שרטטו סקיצה לגרף הפונקציה:

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

4. הוכיחו כי: $\sin^2 x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}x$ לכל x בתחום $[0, \pi]$.

(הדרכה: הוכיחו כי $f(x) = \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$ שלילית בתחום הנתון)

וקטורים:

1. נתון חרוט שראשו בנקודה $S(4,3,-2)$.
 הנקודה $N(1,5,-1)$ היא אמצע גובה החרוט.
 א. מצאו את משוואת המישור עליו מונח בסיס החרוט.

ב. מצאו את נקודת החיתוך בין המישור שמצאתם בסעיף א לבין הישר ON , כאשר O ראשית הצירים.

2. נתון הרוט שגובהו $3\sqrt{3}$ ובסיסו מונח על מישור π . ידוע כי מישור π מאונך למישור π_1 שמשוואתו: $3X - 7Y + 4Z = 0$. ידוע כי ישר l שמשוואתו: $\underline{x} = (8, 6, 5) + t(2, 3, -5)$ מקביל למישור π וקוקדקוד החרוט עליו. א. מצאו את משוואת מישור π . ב. ידוע כי ישר, המוכל במישור המאונך ל- π ומכיל את l , יוצר זווית של 40° עם מישור π . הקטע בין הישר למישור הוא הקו היוצר של חרוט. חשבו את נפח החרוט.

3. נתון ישר $l: \underline{x} = (10, -5, 10) + t(2, 2, 1)$ ומישור $\pi: 3X - 4Y + 2Z = 12$. א. הוכיחו כי הישר מקביל למישור. ב. מצאו את משוואת הישר l_1 המוכל במישור π , מקביל לישר l וקרוב אליו ביותר. ג. חשבו את המרחק בין הישרים l ו- l_1 . ד. מנקודה כלשהי על ישר l , העבירו ישר נוסף החותך את ישר l_1 ויוצר עימו זווית של 30° . הקטע בין הישרים הוא הקו היוצר של חרוט שבסיסו במישור π . מהו נפח החרוט?

טריגונומטריה במרחב:

1. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$, שבסיסה ריבוע שצלעו a . גובה התיבה $2a$. הנקודות E, F, G, H מחלקות את המקצועות הצדדיים ביחס $1:2$ מהבסיס העליון. הנקודה N היא מפגש אלכסוני הבסיס העליון. א. הביעו באמצעות a את שטח המעטפת של הפירמידה $EF GHN$. ב. חשבו את היחס בין נפח הפירמידה הנ"ל לנפח התיבה הנתונה.