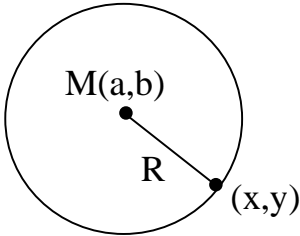


## גיאומטריה אנליטית – מעגל



**מעגל** הוא המקום הגיאומטרי- אוסף כל הנקודות במישור, הנמצאות במרחק קבוע-**רדיוס** (מחוג), מנקודה נתונה-**מרכז המעגל**. נסמן את רדיוס המעגל ב- $R$  ואת נקודת המרכז ושיעוריה ב- $M(a,b)$ .

כאשר המרחק בין שתי נקודות ששיעוריהן  $(x_1, y_1)$  ו- $(x_2, y_2)$  הוא  $d$ , מתקיים:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

כל נקודה  $(x,y)$  שעל המעגל נמצאת במרחק  $R$  ממרכזו  $(a,b)$ , ולכן היא מקיימת את

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2} \quad \text{המשוואה:}$$

**מעגל קנוני** הוא מעגל, שמרכזו בראשית הצירים  $(0,0)$  ומשוואתו:  $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$

נקודה  $(x,y)$  הנמצאת **בתוך המעגל**, מרחקה מהמרכז קטן מהרדיוס  $R$ , ולכן היא מקיימת

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2 \quad \text{את אי-השוויון:}$$

נקודה  $(x,y)$  הנמצאת **מחוץ למעגל**, מקיימת את אי-השוויון:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$

**משפטים הקשורים לנושאים בגיאומטריה אנליטית- תזכורת:**

- אנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר, וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
- קטע ממרכז המעגל אל אמצע המיתר מאונך למיתר.
- מרכז מעגל החוסם מצולע, נמצא בנקודת מפגש האנכים האמצעיים לצלעות.
- דרך שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.
- זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא זווית ישרה.
- שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
- משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

- קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל מאונך למיתר המחבר את נקודות ההשקה, וחוצה את הזווית שבין המשיקים.
- מרכז המעגל החסום במצולע נמצא במפגש חוצי הזוויות של המצולע.

### תרגילים

1. א. רשום משוואת מעגל שמרכזו בנקודה  $(-1,5)$  ורדיוסו 8 יח'.  
 ב. רשום משוואת מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו  $2\sqrt{3}$  יח'.  
 ג. רשום משוואת מעגל שמרכזו בנקודה  $(0,7)$  ורדיוסו 8 יח'. רשום שיעורי נקודה אחת הנמצאת בתוך המעגל, ושיעורי נקודה אחת הנמצאת על המעגל.
2. א. משוואתו של מעגל היא  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ . מהו רדיוסו ומהם שיעורי המרכז? היכן נמצאות הנקודות:  $(0,0)$ ,  $(6,-3)$ ,  $(1,5)$  ביחס למעגל?  
 ב. משוואתו של מעגל היא  $(x-5)^2 + y^2 = 10$ . מהו רדיוסו ומהם שיעורי המרכז?
3. א. מצא משוואת מעגל אשר מרכזו בנקודה  $(5,-2)$  ועובר דרך הנקודה  $(2,2)$ .  
 ב. מצא משוואת מעגל אשר מרכזו בנקודה  $(-4,2)$  ועובר דרך ראשית הצירים.
4. נתונות שתי נקודות:  $P(-4,1)$ ,  $Q(8,-3)$ .  
 א. מצא את משוואת המעגל שקוטרו הוא הקטע PQ.  
 ב. האם הנקודה  $(3,-6)$  נמצאת על המעגל, בתוך המעגל, או מחוץ למעגל? נמק.  
 ג. חשב את שטחו של ריבוע החוסם את המעגל הנ"ל.  
 ב. חשב את שטחו של ריבוע החסום בתוך המעגל הנ"ל.

5. רשום משוואת מעגל אשר :
- נמצא ברביע שלישי, משיק לשני הצירים ורדיוסו 6.
  - מרכזו בנקודה  $(-3,4)$  ומשיק לציר  $x$ .
  - מרכזו בנקודה  $(-3,4)$  ומשיק לציר  $y$ .
  - משיק לציר  $y$  בנקודה  $(0,-2)$  ורדיוסו 7.
6. א. מצא את רדיוסו של מעגל אשר מרכזו בנקודה  $(0, 4)$  והוא חותך מציר  $x$  קטע שאורכו 6. מהי משוואת המעגל?
- מצא משוואת מעגל שמרכזו בנקודה  $(5,-2)$  והוא חותך מציר  $y$  קטע שאורכו 4.
  - רשום משוואת מעגל אשר משיק לציר  $y$  בנקודה  $(0,-2)$  ורדיוסו 7.
7. קודקודי משולש נמצאים בנקודות  $A(-3,2)$ ,  $B(1,4)$ ,  $C(5,-4)$ .
- הוכח שהמשולש ישר זווית (הצג שתי דרכים).
  - מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש.
8. מעגל שמרכזו בנקודה  $M(3,-4)$ , עובר דרך ראשית הצירים.
- מצא את משוואת המעגל.
  - מעגל זה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה נוספת  $A$  ואת ציר ה- $y$  בנקודה נוספת  $B$ . הראה שהנקודות  $A, B, M$  נמצאות על ישר אחד.
9. א. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש שקדקודיו:  $(2,5)$ ,  $(12,5)$ ,  $(2,-1)$ .
- מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש שקדקודיו:  $(0,0)$ ,  $(0,10)$ ,  $(8,14)$ .
  - מצא משוואת מעגל העובר דרך הנקודות:  $(2,5)$ ,  $(6,-1)$ ,  $(4,3)$ .

## זיהוי מרכז ורדיוס על פי משוואה

$$\begin{aligned} & \text{משוואת המעגל הכללי היא: } (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ & \text{נפתח סוגריים ונקבל: } x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2 \\ & \text{או } x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0 \end{aligned}$$

נתונה משוואת מעגל לא מסודרת  $x^2 + y^2 + Nx + Py + Q = 0$ . יש למצוא את שיעורי המרכז ואת רדיוס המעגל.

דרך א':

,  $N = -2a$ , לכן כדי למצוא את שיעור ה-x של המרכז נחלק את המקדם של x ב-(-2),  
,  $P = -2b$ , לכן כדי למצוא את שיעור ה-y של המרכז נחלק את המקדם של y ב-(-2).

$$Q = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow R^2 = a^2 + b^2 - Q \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 - Q}$$

לכן כדי למצוא את ריבוע הרדיוס  $R^2$ , נפחית מסכום הריבועים של שיעורי המרכז (של a ושל b) את האיבר החופשי Q.

דוגמה: נתונה משוואת מעגל:  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ . מצא את המרכז והרדיוס.

$$a = \frac{-6}{-2} = 3, b = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow M(3, -1), R^2 = 3^2 + (-1)^2 - 6 = 4 \Rightarrow R = 2$$

דרך ב':

נרשום את המשוואה בצורה:  $x^2 - 6x + y^2 + 2y = -6$  ונבצע השלמה לריבועים שלמים

באגף שמאל, לפי נוסחאות כפל מקוצר:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$$y^2 + 2y + \underline{\quad} = (y - \underline{\quad})^2, \text{ וכן, } x^2 - 6x + \underline{\quad} = (x - \underline{\quad})^2$$

נוסיף לשני האגפים את המספרים החסרים  $x^2 - 6x + \underline{9} + y^2 + 2y + \underline{1} = -6 + \underline{9} + \underline{1}$

נקבל:  $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ . שיעורי המרכז הם  $(3, -1)$ , הרדיוס  $= 2$ .

## תרגילים

10. מצא את שיעורי המרכז ואת הרדיוס של המעגלים הבאים:

א.  $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$

ב.  $x^2 + y^2 + 12x + 26 = 0$

ג.  $x^2 + y^2 - 10y = 0$

11. בדוק עבור כל אחת מהמשוואות הבאות האם היא מייצגת מעגל. נמק!

א.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$

ב.  $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 50 = 0$

ג.  $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

12. קבע עבור כל אחת מהמשוואות הבאות, לאילו ערכים של  $k$  היא מייצגת מעגל.

א.  $x^2 + y^2 = k^2$

ב.  $x^2 + y^2 - 2x + k = 0$

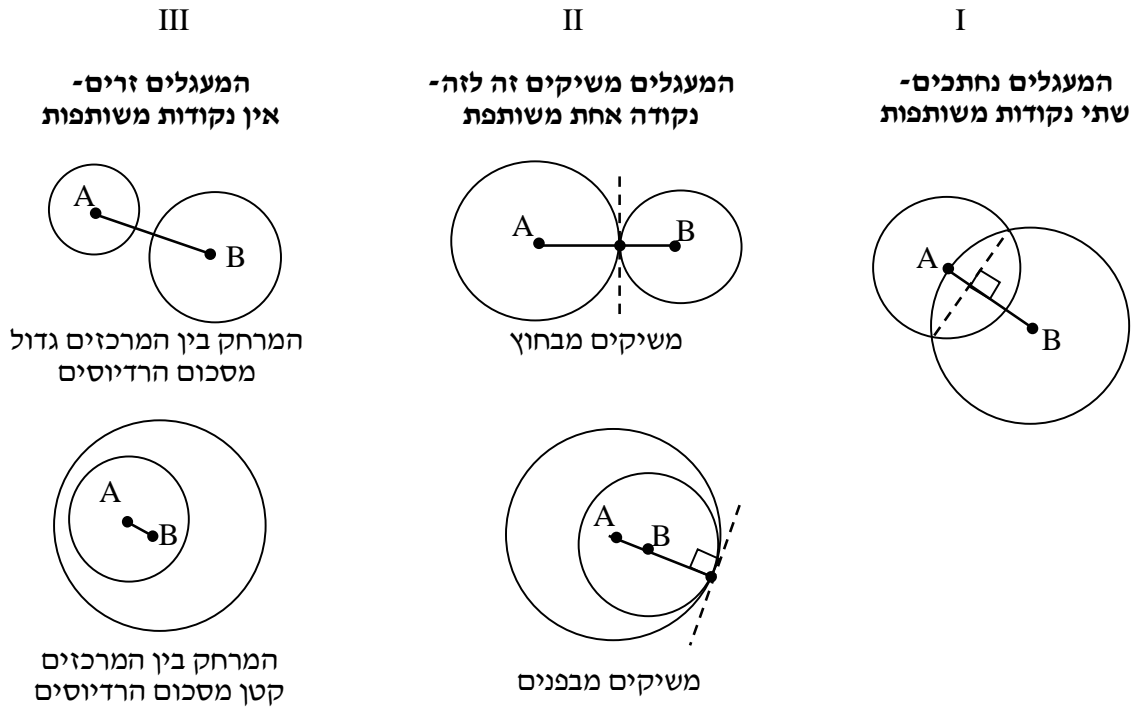
ג.  $x^2 + y^2 - 2ky = k$

ד.  $x^2 + y^2 + 2kx + 4y + 13 = 0$

**מצבים הדדיים אפשריים בין מעגל וישר במישור**



**מצבים הדדיים אפשריים בין שני מעגלים**



**הערה:**

- \* כאשר שני מעגלים נחתכים, הקטע המחבר את המרכזים מאונך למיתר המשותף וחוצה אותו.
- \* מרכזי שני מעגלים המשיקים זה לזה ונקודת ההשקה נמצאים על ישר אחד, המאונך למשיק המשותף.

## תרגילים

13. נתון המעגל:  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ . קבע עבור כל אחד מהישרים הבאים האם הוא משיק למעגל, חותך את המעגל או אינו נוגע במעגל.

א.  $x = 1$     ב.  $x = -1$     ג.  $y = 5$     ד.  $y = -x - 1$

14. המעגל  $x^2 + y^2 = 25$  והישר  $x - y + 1 = 0$  נחתכים בנקודות A ו-B. מצא את אורך המיתר AB.

15. המעגל  $x^2 + y^2 = 100$  והישר  $3x + y = 10$  נחתכים בנקודות A ו-B. מצא את שטחו של משולש AOB (O - ראשית הצירים).

16. המעגל  $(x-2)^2 + (y-10)^2 = 200$  חותך את ציר ה-x בנקודות A ו-C ואת ציר ה-y בנקודות B ו-D.

א. חשב את שטח המרובע ABCD.

ב. חשב את היקף המרובע ABCD.

17. מצא משוואת מעגל שמרכזו בנקודה  $(8,0)$ , ומשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 9$ :  
א. מבחוץ.    ב. מבפנים.

18. מצא את אורכי המשיקים היוצאים מהנקודה  $(0,13)$  למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ .

19. א. מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 50$  בנקודה  $(-7, 1)$ .

ב. מצא את משוואות המשיקים למעגל  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$  בנקודות חיתוכו עם ציר ה-x.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 + 6y = 17$  בנקודה  $(-1,2)$  שעליו.

20. קצהו האחד של קוטר במעגל  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = R^2$  נמצא בראשית הצירים.

א. מצא את ערכו של R.

ב. מצא את שיעורי נקודת קצהו השני של הקוטר.

ג. מצא את משוואות שני המשיקים בקצות קוטר זה.

21. מצא את רדיוסו של מעגל שמרכזו בנקודה  $(-6,4)$  ומשיק לישר  $y = 2x - 4$ .

22. הראה שהמעגלים הבאים נחתכים ומצא את אורך המיתר המשותף:

א.  $x^2 + (y-10)^2 = 100$  ו-  $(x-5)^2 + y^2 = 25$

ב.  $x^2 + y^2 = 8$  ו-  $(x-6)^2 + y^2 = 20$

23. הראה שהמעגלים הבאים משיקים זה לזה ומצא את משוואת המשיק משותף:

א.  $(x-5)^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 9$

ב.  $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 18$ ,  $x^2 + y^2 = 50$