

משוואה דו-ריבועית, משוואה ריבועית הנפתרת באמצעות הצבה

מיועד לתלמידי מופת בכיתה ט' כהרחבה לנושא משוואות ריבועיות. חלק מהתרגילים מהספר 005 גבי יקואל

א. פתרו את המשוואות הבאות :

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad .1$$

$$\frac{144}{x^4} - \frac{97}{x^2} + 9 = 0 \quad .2$$

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \quad .3$$

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \quad .4$$

$$\frac{16}{x^2} = 13 - (x + 2)(x - 2) \quad .5$$

ב. פתרו את המשוואות הבאות (היעזרו בסימון) :

$$(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0 \quad .1$$

$$(3x^2 + 5x)^2 - 4 = 0 \quad .2$$

ג. פתרו את המשוואות הבאות (היעזרו בסימון ובפירוק לגורמים) :

$$(x^2 - 6x)^2 + 2(x - 3)^2 = 81 \quad .1$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 2(x + 2)^2 = 57 \quad .2$$

$$x^2(x^2 - 5) - 11(x^2 - 1) = x^2 - 5 \quad .3$$

$$8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) = 69 \quad .4$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2 = 0 \quad .5$$

ד. שאלת אתגר : פתרו את המשוואה הבאה :

$$(x^2 - x - 2)^4 + (2x + 1)^4 = (x^2 + x - 1)^4$$

פתרונות

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad .1 \quad .א$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$$

$$\boxed{x = \pm 2 \quad \text{או} \quad x = \pm 3}$$

$$\frac{144}{x^4} - \frac{97}{x^2} + 9 = 0 \quad .2$$

$$x \neq 0 \quad 9x^4 - 97x^2 + 9 = 0$$

$$x^2_{1,2} = \frac{97 \pm 65}{18}$$

$$x^2 = 9 \quad \text{או} \quad x^2 = \frac{16}{9}$$

$$\boxed{x = \pm 3 \quad \text{או} \quad x = \pm \frac{4}{3}}$$

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \quad .3$$

$$(x^3 + 8)(x^3 - 1) = 0$$

$$x^3 = -8 \quad \text{או} \quad x^3 = 1$$

$$\boxed{x = -2 \quad \text{או} \quad x = 1}$$

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \quad .4$$

$$(3x^2 - 1)^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{16}{x^2} = 13 - (x+2)(x-2) \quad .5$$

$$16 = x^2(13 - x^2 + 4)$$

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0$$

$$\boxed{x = \pm 1 \quad \text{או} \quad x = \pm 4}$$

$$(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0 \quad .1 \quad .ב$$

$$2x^2 - x = t \quad \text{סימון:}$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1) = 0$$

$$t = 3 \quad \text{או} \quad t = 1$$

חזרה למשתנה המקורי:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \quad \text{או} \quad 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\boxed{x_1 = 1\frac{1}{2}, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}}$$

$$(3x^2 + 5x)^2 - 4 = 0 \quad .2$$

$$3x^2 + 5x = t \quad \text{סימון:}$$

$$t^2 = 4$$

⇓

$$t = 2 \quad \text{או} \quad t = -2$$

חזרה למשתנה המקורי:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \text{או} \quad 3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6} \quad x_{3,4} = \frac{-5 \pm 1}{6}$$

$$\boxed{x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -1, x_4 = -\frac{2}{3}}$$

$$(x^2 - 6x)^2 + 2(x - 3)^2 = 81 \quad .1 \quad .ג$$

$$(x - 3)^2 = t \quad \text{סימון:}$$

\Downarrow

$$x^2 - 6x + 9 = t$$

\Downarrow

$$x^2 - 6x = t - 9$$

$$(t - 9)^2 + 2t = 81 \quad \text{הצבה:}$$

$$t^2 - 16t = 0$$

$$t(t - 16) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{או} \quad t = 16$$

חזרה למשתנה המקורי:

$$(x - 3)^2 = 0 \quad \text{או} \quad (x - 3)^2 = 16$$

$$\boxed{x_1 = 3}$$

$$x - 3 = 4 \quad \text{או} \quad x - 3 = -4$$

$$\boxed{x_2 = 7, x_3 = -1}$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 2(x + 2)^2 = 57 \quad .2$$

$$(x + 2)^2 = t \quad \text{סימון:}$$

\Downarrow

$$x^2 + 4x + 4 = t$$

↓

$$x^2 + 4x = t - 4$$

$$3(t-4)^2 - 2t = 57 \quad \text{הצבה:}$$

$$3t^2 - 26t - 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{26 \pm 28}{6}$$

$$t = 9 \quad \text{או} \quad t = -\frac{1}{3}$$

חזרה למשתנה המקורי:

$$(x+2)^2 = 9 \quad \text{או} \quad (x+2)^2 = -\frac{1}{3}$$

ϕ

$$x + 2 = 3 \quad \text{או} \quad x + 2 = -3 \quad \text{אין פתרון ממשי}$$

$$\boxed{x_1 = 1 \quad \text{או} \quad x_2 = -5}$$

$$x^2(x^2 - 5) - 11(x^2 - 1) = x^2 - 5 \quad .3$$

$$x^2 - 5 = t \quad \text{סימון:}$$

↓

$$x^2 = t + 5$$

$$x^2 - 1 = t + 4$$

$$t(t+5) - 11(t+4) = t \quad \text{הצבה:}$$

$$t^2 - 7t - 44 = 0$$

$$(t-11)(t+4) = 0$$

$$t = 11 \quad \text{או} \quad t = -4$$

חזרה למשתנה המקורי:

$$x^2 - 5 = 11 \quad \text{או} \quad x^2 - 5 = -4$$

$$x^2 = 16 \quad \text{או} \quad x^2 = 1$$

$$\boxed{x = \pm 4 \quad \text{או} \quad x = \pm 1}$$

$$8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) = 69 \quad .4$$

$$x + \frac{1}{x} = t \quad \text{סימון:}$$

↓

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$8(t^2 - 2) + 14t = 69 \quad \text{הצבה:}$$

$$8t^2 + 14t - 85 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-14 \pm 54}{16}$$

$$t = 2\frac{1}{2} \quad \text{או} \quad t = -4\frac{1}{4}$$

חזרה למשתנה המקורי:

$$x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2} \quad | \cdot 2x \quad \text{או} \quad x + \frac{1}{x} = -4\frac{1}{4} \quad | \cdot 4x$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{או} \quad 4x^2 + 17x + 4 = 0$$

$$(2x - 1)(x - 2) = 0 \quad \text{או} \quad (4x + 1)(x + 4) = 0$$

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -\frac{1}{4}, \quad x_4 = -4}$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0 \quad .5$$

תחום הגדרה: $x > 0$

$$\sqrt[6]{x} = t \quad \text{סימון:}$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \quad \text{הצבה:}$$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

$$t = 2 \quad \text{או} \quad t = -1$$

חזרה למשתנה המקורי:

$$\sqrt[6]{x} = 2 \mid ()^6 \quad \text{או} \quad \sqrt[6]{x} = -1$$

$$\boxed{x = 64}$$

ϕ אין פתרון ממשי

$$(x^2 - x - 2)^4 + (2x + 1)^4 = (x^2 + x - 1)^4 \quad .\text{ד}$$

$$x^2 - x - 2 = a, \quad 2x + 1 = b \quad \text{סימון:}$$

\Downarrow

$$\text{חיבור} \quad x^2 + x - 1 = a + b$$

$$a^4 + b^4 = (a + b)^4 \quad \text{נציב במשוואה:}$$

1

ניזכר במשולש פסקל:

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

ונפתח סוגריים (או בשני שלבים לפי נוסחת כפל מקוצר):

$$\underline{a^4} + \underline{b^4} = \underline{a^4} + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + \underline{b^4}$$

$$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 = 0$$

$$2ab(2a^2 + 3ab + 2b^2) = 0$$

$$2ab = 0 \quad \text{או} \quad 2a^2 + 3ab + 2b^2 = 0$$

\Downarrow

\Downarrow

$$a = 0 \quad \text{או} \quad b = 0 \quad \text{או} \quad a_{1,2} = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 16b^2}}{4}$$

\Downarrow

\Downarrow

ϕ

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{או} \quad 2x + 1 = 0$$

אין פתרון ממשי

$$\boxed{x_1 = 2 \quad \text{או} \quad x_2 = -1}$$

$$\boxed{x_3 = -\frac{1}{2}}$$