כיתה ט': פתרון וחקירת מערכת משוואות לינאריות עם פרמטרים

במסמך זה נציג את תהליך הפתרון והחקירה של מערכת משוואות לינאריות עם פרמטרים. יושם דגש על אופני הפתרון השונים והמשמעות של כל תשובה.

החומר המוצג כאן מתאים לכיתות ט' מופת ולכן לא תיעשה חקירה באמצעות דטרמיננטות.

פתרון מערכת משוואות לינאריות עם פרמטרים:

רמה ראשונה: ברמה זו מופיעים פרמטרים שאינם מוגבלים בערכים מסויימים. מכאן שהפתרון אינו דורש חקירה.

דוגמה: פתרו את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x+3y=7a \\ x-2y=-7a \end{cases}$$

נפתור באמצעות השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 2x+3y=7a \\ x-2y=-7a \end{cases} \quad \Big|(-2)$$

$$+\begin{cases} 2x+3y=7a \\ -2x+4y=14a \end{cases}$$

$$-----------$$

$$7y=21a$$

$$\boxed{y=3a}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x=-a}$$

מסקנה: קיים פתרון יחיד, הישרים נחתכים בנקודה $(-a,3a)$.

רמה שנייה: ברמה זו מופיעים פרמטרים המוגבלים בערכים מסויימים.

דרך פתרון ראשונה: אנו פותרים את המערכת וקובעים, במהלך הפתרון, תחומי הגדרה לפרמטרים. בסוף הפתרון, אנו בודקים על-ידי הצבה, מה קורה בערכים שפסלנו בדרך.

דוגמה: פתרו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x+ay=a^2 \\ x+2y=5a-6 \end{cases}$$

נפתור באמצעות השוואת מקדמים:

$$-\begin{cases} x+ay=a^2 \\ x+2y=5a-6 \end{cases}$$

$$\text{-----------}$$

$$(a-2)y=a^2-5a+6 \qquad \Big| :(a-2) \qquad \boxed{a\neq 2}$$

$$y=\frac{(a-2)(a-3)}{(a-2)}$$

$$\boxed{y=a-3}$$

$$x+a(a-3)=a^2$$

$$\boxed{x=3a}$$

כלומר: אם $a\neq 2$ קיים פתרון יחיד והוא: $(3a,a-3)$.

נותר לבדוק מה קורה אם $a=2$, נציב במערכת המקורית ונבחן את התוצאה:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

קיבלנו מערכת משוואות שקולות ומכאן שיש אינסוף פתרונות עבור $a=2$.

כאן כדאי להרחיב וללמד את המשמעות של אינסוף הפתרונות.

קיימים אינסוף פתרונות אבל לא כל פתרון מתקבל! רק פתרונות המתאימים לתבנית מסויימת מתקבלים. למציאת הפתרון הכללי, נבחר פרמטר לייצוג ערכו של x . למשל: $x=t$. על-ידי הצבה במערכת שקיבלנו קל לראות כי $y=2-\frac{1}{2}t$ ולכן הפתרון הכללי $\left(t,2-\frac{1}{2}t\right)$. פתרון כללי זה מאפשר למצוא אינסוף פתרונות על-ידי בחירה אקרעית של t. כך למשל:

$$\begin{aligned} t=1 &\quad\Rightarrow \left(1,1\frac{1}{2}\right) \\ t=4 &\quad\Rightarrow (4,0) \\ t=-2 &\quad\Rightarrow (-2,3) \end{aligned}$$

דרך פתרון שנייה: דרך זו מתאימה לשאלות בהן מתבקשת רק חקירה ללא מתן הפתרון .

דוגמה: מצאו לאילו ערכים של m יש למערכת: $\begin{cases} m^2x+y=m \\ 9x+y=-3 \end{cases}$

א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

היות ולא התבקשנו להציג את הפתרון, מספיק אם נבצע חקירה.

נחזור בקצרה על החומר שלמדנו בעבר:

אם למערכת משוואות לינאריות אין פתרון, המשמעות היא כי הישרים מקבילים, כל למשל:

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}x-2 \end{cases}$$

נשים לב כי אם נבנה את יחס המקדמים בהתאמה נקבל: $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{3}{8}$

באופן כללי, ניתן לרשום כי אם למערכת: $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \\ y=-\frac{d}{e}x+\frac{f}{e} \end{cases}$ אין פתרון,

כי אז: $\frac{a}{d}=\frac{b}{e} \Rightarrow -\frac{a}{b}=-\frac{d}{e}$ וגם $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}\neq\frac{c}{f}$.

לעומת זאת, אם למערכת משוואות לינאריות יש אינסוף פתרונות, המשמעות היא כי הישרים מתלכדים, כך למשל:

$$\begin{cases} 3x-4y=10 \\ 6x-8y=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}x-2\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{4}x-2\frac{1}{2} \end{cases}$$

נשים לב כי אם נבנה את יחס המקדמים בהתאמה נקבל: $\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}=\frac{10}{20}$

באופן כללי ניתן לרשום כי אם למערכת: $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \\ y=-\frac{d}{e}x+\frac{f}{e} \end{cases}$ יש אינסוף פתרונות, כי אז:באותו האופן: $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$.

התבוננות בהכללות שביצענו מראה כי אם: $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}$ קיים מצב קיצוני: אין פתרון או אינסוף פתרונות.

לבדיקת סוג המצב, יש להשוות ליחס: $\frac{c}{f}$.

נחזור לתרגיל שלנו: יש לחקור את המערכת הבאה: $\begin{cases} m^2x+y=m \\ 9x+y=-3 \end{cases}$

נבדוק, תחילה, מתי יש מצב קיצוני: $\frac{m^2}{9}=\frac{1}{1}$. הפתרון מוביל לכך ש: $m=\pm3$.

נבדוק כל אחר מהערכים שקיבלנו:

$\frac{9}{9}=\frac{1}{1}\neq\frac{3}{-3}$ $m=3$ מכאן שאין פתרון למערכת.

$\frac{9}{9}=\frac{1}{1}=\frac{-3}{-3}$ $m=-3$ מכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

כמו-כן ברור כי אם $m\neq\pm3$ קיים פתרון יחיד למערכת.

הערה חשובה: אם תלמיד מעדיף לפתור את המערכת ולהציב ערכים בעייתיים, במקום חקירה בלבד, זה בסדר!

<u>נפתור דוגמאות נוספות:</u>

1.נתונה מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases}(2m-3)x-my=m-2\\ 5x-(2m+3)y=3\end{cases}$$

קבעו לאילו ערכי m יש למערכת: א. פתרון יחיד ב. אינסוף פתרונות ג. אין פתרון.

פתרון: היות ולא נתבקשנו לפתור את המערכת, נסתפק בחקירתה. מתקבל מצב קיצוני כאשר:

$$\frac{2m-3}{5}=\frac{-m}{-(2m+3)}$$

כבר עלינו לקבוע תחום הגדרה: $m\neq-1\frac{1}{2}$, נבדוק אותו בסוף.

פתרון המצב הקיצוני הוא: $4m^2-9=5m$

$$4m^2-5m-9=0$$
$$(m+1)(4m-9)=0$$
$$\boxed{m_1=-1}\qquad\boxed{m_2=2\frac{1}{4}}$$

נבדוק על-ידי הצבה במקור:

אם $m=-1$ היחס שנקבל הוא: $\frac{-5}{5}=\frac{1}{-1}=\frac{-3}{3}$ כלומר: ישנם אינסוף פתצרונות.

אם $m=2\frac{1}{4}$ היחס שנקבל הוא: $\frac{1\frac{1}{2}}{5}=\frac{-2\frac{1}{4}}{-7\frac{1}{2}}\neq\frac{\frac{1}{4}}{3}$ כלומר: אין פתרון למערכת.

נותר לבדוק $m=-1\frac{1}{2}$. נציב במערכת המקורית ונקבל: $\begin{cases}-6x+1\frac{1}{2}y=-3\frac{1}{2}\\ 5x=3\end{cases}$ ברור כי קיים פתרון יחיד.

לסיכום:א. קיים פתרון יחיד אם $m\neq -1$ וכן $m\neq 2\frac{1}{4}$ ב. קיימים אינסוף פתרונות כאשר $m=-1$.

ג. אין פתרון כאשר $m=2\frac{1}{4}$.

נוסיף כי במצב של אינסוף פתרונות, הפתרון הפרמטרי יהיה:

$$x=t$$
$$5x-y=3$$
$$y=5t-3$$
$$\boxed{(t,5t-3)}$$

2.נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases}x+(4-a)y=a-1\\(2-2a)x-4y=-a\end{cases}$$

א. עבור אילו ערכים של a אין פתרון למערכת המשוואות?
ב. עבור אילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ומהו?

פתרון: היות ואנו נדרשים לתת את הפתרון למערכת, נפתור בשיטה הראשונה.

$$\begin{cases}x+(4-a)y=a-1 & \Big|-(2-2a)\\(2-2a)x-4y=-a\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-(2-2a)x-(2-2a)(4-a)y=-(2-2a)(a-1)\\(2-2a)x-4y=-a\end{cases}$$

$$(-2a^2+10a-12)y=2a^2-5a+2$$

$$y=\frac{(a-2)(2a-1)}{(a-2)(6-2a)} \qquad a\neq 2 \quad a\neq 3$$

$$\boxed{y=\frac{2a-1}{2(3-a)}}$$

$$x=a-1-(4-a)\frac{2a-1}{2(3-a)}$$

$$\boxed{x=\frac{a+2}{2(a-3)}}$$

נבדוק את הערכים שפסלנו עבור הפרמטר:

אם $a=2$ המערכת היא:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x-4y=-2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{-2}=\frac{2}{-4}=\frac{1}{-2}$$

ולכן יש אינסוף פתרונות למערכת.

אם $a=3$ המערכת היא:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -4x-4y=-3 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{-4}=\frac{1}{-4}\neq\frac{2}{-3}$$

ולכן אין פתרון למערכת.

תשובה סופית: א. אין פתרון למערכת כאשר $a=3$. ב. אם $a\neq 2$ וגם $a\neq 3$ $a\neq 3$, יש למערכת פתרון יחיד והוא: $\left(\frac{a+2}{2(3-a)},\frac{2a-1}{2(a-3)}\right)$.