

## פתרון משוואות ומערכות משוואות תוך שימוש בפירוק לגורמים

קובץ זה מיועד לתלמידי כיתות ח' מופת סיימו ללמוד את כל שיטות הפירוק לאורחים וסופטים בפתרון משוואות ומערכות משוואות. זהו תרגיל כרמת ההצרכה, מתאים לתלמידי חלקים.

### פתרו את המשוואות הבאות:

א. משוואות בחזקות גבוהות ו/או עם שני משתנים:

פתרו את המשוואות הבאות:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad .1$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad .2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0 \quad .3$$

### ב. משוואות ששורשיהן מוגבלים:

נתון כי הנעלמים הינם מספרים שלמים וחייביים, פתרו את המשוואות הבאות:

$$9x^2 - y^2 = 6 \quad .1$$

$$x^2 + 2xy - x - 2y = 4 \quad .2$$

$$x^2 - 4xy + 3y^2 = 3 \quad .3$$

$$x^2 - 4y^2 = 5 \quad .4$$

$$xy = x + y \quad .5$$

### ג. מערכות משוואות:

$$\begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} \\ y^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \quad .1$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ xy(x + y) = -2 \end{cases} \quad .2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2xy + 1 = 0 \end{cases} \quad .3$$

ד.מצאו פתרון אחד למשוואות הבאות:

$$(5 + 2\sqrt{6})^x = 5 - 2\sqrt{6} \quad .1$$

$$(\sqrt{2} + 3)^x = 11 + 6\sqrt{2} \quad .2$$

## פתרונות:

.א

.1

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^3 - x + \underbrace{2x^2 - 2}_{2(x^2 - 1)} = 0$$

$$x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1)$$

$$(x-1)(x+1)(x+2) = 0$$

$$\boxed{x=1 \quad x=-1 \quad x=-2}$$

.2

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$2(x^3 - 1) - 7x(x-1) = 0$$

$$2(x-1)(x^2 + x + 1) - 7x(x-1) = 0$$

$$(x-1) [2(x^2 + x + 1) - 7x] = 0$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\boxed{x_1 = 1} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\boxed{x_2 = 2} \quad \boxed{x_3 = \frac{1}{2}}$$

.3

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} + \underbrace{y^2 - 6y + 9}_{(y-3)^2} = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 0$$

$$\boxed{x = -1 \quad y = 3}$$

ב.

1. אין שני ריבועים שלמים שהפרשם 6.

$$9x^2 - y^2 = 6$$

$$(3x)^2 - y^2 = 6$$

↓

$\phi$

2.

$$x^2 + 2xy - x - 2y = 4$$

$$x(x-1) + 2y(x-1) = 4$$

$$(x-1)(x+2y) = 4$$

$$1 \cdot 4 = 4 \quad \text{or} \quad 4 \cdot 1 = 4 \quad \text{or} \quad 2 \cdot 2 = 4$$

↓

$$\boxed{x=2 \quad y=1}$$

↓

$\phi$

↓

$\phi$

3.

$$x^2 - 4xy + 3y^2 = 3$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - y^2 = 3$$

$$(x-2y)^2 - y^2 = 3$$

↓

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$\boxed{y=1 \quad x=4}$$

4.

$$x^2 - 4y^2 = 5$$

$$x^2 - (2y)^2 = 5$$

$$\Downarrow$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$\boxed{x=3 \quad y=1}$$

.5

$$xy = x + y$$

$$x(y-1) = y$$

$$x = \frac{y}{y-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y=2 \quad x=2}$$

.ג

.1

$$\begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} \\ y^2 - x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{y^2-1} = \frac{1}{x} \\ y^2 - 1 = 4 + x \end{cases}$$

נציב את המשוואה השנייה במשוואה הראשונה:

$$\frac{2}{4+x} = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \quad x \neq -4$$

$$2x = 4 + x$$

$$\boxed{x=4}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$y^2 - 9 = 0$$

$$\boxed{y = \pm 3}$$

.2

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ xy(x + y) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 7 \\ xy(x + y) = -2 \end{cases}$$

דרך פתרון ראשונה: הצבה

$$\frac{-2}{xy}(x^2 - xy + y^2) = 7 \quad x, y \neq 0$$

$$-2x^2 + 2xy - 2y^2 = 7xy$$

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0$$

$$2x^2 + 4xy + xy + 2y^2 = 0$$

$$2x(x + 2y) + y(x + 2y) = 0$$

$$(x + 2y)(2x + y) = 0$$

$$\boxed{x = -2y} \quad \text{or} \quad \boxed{x = -\frac{1}{2}y}$$

נציב במשוואה השנייה:

$$-2y^2 \cdot (-y) = -2$$

$$y^3 = -1$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$\boxed{x = 2}$$

or

$$-\frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{1}{2}y = -2$$

$$y^3 = 8$$

$$\boxed{y = 2}$$

$$\boxed{x = -1}$$

דרך פתרון שנייה: חלוקה

$$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy(x+y)} = -\frac{7}{2}$$

$$x, y \neq 0 \quad x \neq -y$$

$$\frac{x^2-xy+y^2}{xy} = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{x}{y} = t$$

נסמן:

$$t - 1 + \frac{1}{t} = -\frac{7}{2}$$

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

$$(2t+1)(t+2) = 0$$

$$\boxed{t = -\frac{1}{2}} \quad \text{or} \quad \boxed{t = -2}$$

הפתרון המתקבל זהה לפתרון בדרך הראשונה.

.3

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

---


$$y^2 + 2xy - 2x - 1 = 0$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(y+x)^2 = (x+1)^2$$

↓

$$\boxed{y=1}$$

נציב:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$\boxed{x=1}$$

.1

.1

$$(5+2\sqrt{6})^x = 5-2\sqrt{6} \quad \left| (5+2\sqrt{6}) \right.$$

$$(5+2\sqrt{6})^{x+1} = 25-4\cdot 6$$

$$(5+2\sqrt{6})^{x+1} = 1 = (5+2\sqrt{6})^0$$

$$x+1=0$$

$$\boxed{x=-1}$$

.2

$$(\sqrt{2}+3)^x = 11+6\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}+3)^x = (\sqrt{2})^2 + 2\cdot 3\cdot \sqrt{2} + 3^2$$

$$(\sqrt{2}+3)^x = (\sqrt{2}+3)^2$$

$$\boxed{x=2}$$