תרגילי אתגר בנושא ביטויים אי-רציונליים

מחברת: ויקה

1. מה גדול יותר:

א. $\sqrt{2008}+\sqrt{2010}$ או $\sqrt{2009}$

ב. $\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}$ או $2\sqrt{a}$

פתרון סעיף ב:

$$2\sqrt{a} \qquad \sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}$$

$$4a \qquad a-1+2\sqrt{a^2-1}+a+1$$

$$4a \qquad 2a+2\sqrt{a^2-1}$$

$$2a \qquad a+\sqrt{a^2-1}$$

$$a \qquad \sqrt{a^2-1}$$

$$a^2 \qquad a^2-1$$

$$\Downarrow$$

$$2a \succ \sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}$$

תחום הגדרה:

$$a\geq 1$$

$$a\geq -1$$

$$a\geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$a\geq 1$$

2. חשבו את הביטויים הבאים:

א. $$\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}}+\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}+.......+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}=$$

ב. $$\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}=$$

ג. $$\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{33-20\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=$$

ד. $$\frac{9+3\sqrt{3}}{9+\sqrt{243}}=$$

פתרונות:

א. נכפיל מונים ומכנים בצמודים למכנים.

$$\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{102}}+\frac{1}{\sqrt{102}+\sqrt{103}}+.......+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}=$$

$$=\frac{\sqrt{100}-\sqrt{101}}{-1}+\frac{\sqrt{101}-\sqrt{102}}{-1}+\frac{\sqrt{102}-\sqrt{103}}{-1}+........+\frac{\sqrt{120}-\sqrt{121}}{-1}=$$

$$=\frac{10-11}{-1}=1$$

ב. נשלים לריבוע.

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}=\sqrt{25-10\sqrt{3}+3}+\sqrt{25+10\sqrt{3}+3}=$$

$$\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}=5-\sqrt{3}+5+\sqrt{3}=10$$

ג. שוב, נבצע השלמה לריבוע.

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{33-20\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(5-2\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(1-3\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=3-\sqrt{2}+5-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-1=7$$

ד. שוב, הכפלת מונה ומכנה בצמוד למכנה.

$$\frac{9+3\sqrt{3}}{9+\sqrt{243}}=\frac{(9+3\sqrt{3})(9-\sqrt{243})}{81-243}=\frac{3(3+\sqrt{3})9(1-\sqrt{3})}{-162}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3})}{-6}=\frac{-2\sqrt{3}}{-6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.........+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\prec\sqrt{n+1}$$

פתרון:
נכפיל מונים ומכנים בצמודים למכנים.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.........+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$$
$$=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+.......+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-n-1}=$$
$$=-1(1-\sqrt{n+1})=\sqrt{n+1}-1\prec\sqrt{n+1}$$

4. מצאו לפחות פתרון אחד למשוואות הבאות:

א. $(5+2\sqrt{6})^x=5-2\sqrt{6}$

ב. $(\sqrt{2}+3)^x=11+6\sqrt{2}$

ג. $(5+2\sqrt{6})^x=49-20\sqrt{6}$

פתרונות:

א.

$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x}=5-2\sqrt{6}$$
$$\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x-1}=1$$
$$\frac{\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2}}{25-4\cdot 6}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x-1}=1$$
$$\left(5+2\sqrt{6}\right)^{x+1}=1$$
$$x+1=0$$
$$x=-1$$

ב.

$$\left(\sqrt{2}+3\right)^{x}=11+6\sqrt{2}$$
$$\left(\sqrt{2}+3\right)^{x}=9+6\sqrt{2}+2$$
$$\left(\sqrt{2}+3\right)^{x}=\left(3+\sqrt{2}\right)^{2}$$
$$\left(\sqrt{2}+3\right)^{x-2}=1$$
$$x=2$$

ג. כמו בסעיף ב, הפתרון הוא: $x=-2$

5. פשטו את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{\sqrt{2\sqrt{7+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3}}=$

ב. $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{7-4\sqrt{3}}}}=$

פתרון סעיף א:

$$\sqrt{\sqrt{2\sqrt{7+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}-\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}=$$

מעבר ראשון: $7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2}$

מעבר שני: $4+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}+3=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}$

$$=\sqrt{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}=1$$