<u>הוכחת אי הרציונליות השל $\sqrt{2}$:</u>

ההוכחה מתאימה לכיתה ח' מופת, לאחר הצגת משפט פיתגורס.

כשלמדנו את משפט פיתגורס נתקלנו באורך יתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים שהוא $\sqrt{2}$. טענו כי המספר הינו אי-רציונלי, כלומר: לא ניתן להציגו כמנה של שני מספרים שלמים. נוכיח את הטענה:

נניח בשלילה כי $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי. מכאן שניתן להציגו באופן:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

כאשר p ו- q מייצגים מספרים טבעיים זרים, כלומר השבר $\frac{p}{q}$ מצומצם.

נעלה בריבוע את שני האגפים:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}=\frac{p}{q} \qquad \Big|(\ )^2 \\ &2=\frac{p^2}{q^2} \\ &\Downarrow \\ &2q^2=p^2 \end{aligned}$$

מכאן ש: p מספר זוגי ולכן ניתן לייצגו באופן: $p=2k$ כאשר k מספר טבעי.

נציב בתחילת התהליך ונקבל:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}=\frac{2k}{q} \qquad \Big|(\ )^2 \\ &2=\frac{4k^2}{q^2} \qquad \Big|\div 2 \\ &\Downarrow \\ &q^2=2p^2 \end{aligned}$$

מכאן ש: q מספר זוגי.

זאת סתירה לנתון ש: p ו- q זרים.

לכן, $\sqrt{2}$ הינו מספר אי רציונלי.

מ.ש.ל