טעימות מתורת המספרים

בנושא זה נכיר מושגים מתורת המספרים ונציג אופנים מעניינים ומאתגרים לשילוב נושא זה בהוראת המתמטיקה. אנו נשתמש באיומנויות הגילוי וההוכחה. התלמיד ילמד כי אם אנו טוענים טענה מסויימת נכונה תמיד, אנו חייבים הוכחה פורמאלית אם אנו טוענים טענה מסויימת אינה נכונה, מספיק לתת דוגמה סותרת.

מספרים מלבניים: (rectangular numbers)

אלו מספרים שניתן להציג באופן: $n=a\cdot b$ כאשר a,b מספרים חיוביים שלמים שונים מ-1.

לדוגמה: $4\cdot 5=20$.

מסקנה מיידית: מספרים ראשוניים אינם מספרים מלבניים.

שאלות לחקירה:

1. האם סכום מספרים מלבניים הוא בהכרח מספר מלבני?
2. האם מכפלת מספרים מלבניים היא בהכרח מספר מלבני?
3. האם ייצוג של מספר מלבני הוא יחיד?

תשובות לשאלות החקר:

1. סכום שני מספרים מלבניים אינו בהכרח מלבני.

כך למשל:

$$9=3\cdot 3$$

$$8=2\cdot 4$$

$$9+8=17$$

וכידוע, 17 הוא מספר ראשוני, ולכן אינו מלבני!

דוגמה נוספת:

$$35=7\cdot5$$

$$6=2\cdot3$$

$$35+6=41$$

וכידוע, 41 גם הוא מספר ראשוני, ולכן אינו מלבני!

אך אם נרצה לבדוק האם קיימים מצבים בהם כן יתקבל מספר מלבני, איך נבדוק זאת?

נייצג את שני המספרים המלבניים אותם אנו נחבר:

$$n=a\cdot b$$

$$p=c\cdot d$$

$$n+p=a\cdot b+c\cdot d$$

מהתבוננות ראשונית ברור כי אם קיים גורם משותף בין $a\cdot b$ לבין $c\cdot d$, אז יתקבל מספר מלבני.

דוגמה:

$$4\cdot5=20$$

$$6\cdot7=42$$

$$20+42=4\cdot5+6\cdot7=2(10+21)=2\cdot31=62$$

2. מכפלת מספרים מלבניים היא בהכרח, על-פי הגדרת מספר מלבני, מספר מלבני. נחדד ונאמר כי קיימות כמה הצגות למכפלה המתקבלת.

הסבר:

$$n=a\cdot b$$

$$p=c\cdot d$$

$$n\cdot p=(a\cdot b)(c\cdot d)=(a\cdot c)(b\cdot d)=(a\cdot d)(b\cdot c)$$

3. ייצוג יחיד יהיה רק אם מרכיבי המספר המלבני הם ראשוניים או חסרי גורם משותף, כלומר: מספרים זרים.

מספרים משולשים (triangular numbers):

1 :   1

3:    1
   1 1

6:    1
   1 1
  1 1 1

10:    1
   1 1
  1 1 1
 1 1 1 1

15:    1
   1 1
  1 1 1
 1 1 1 1
1 1 1 1 1

וכך הלאה.

אנו רואים את החוקיות במספרים המשולשים. ניתן לתת לתלמידים לגלות חוקיות זו:

$1=1$

$3=1+2$

$6=1+2+3$

$10=1+2+3+4$

$15=1+2+3+4+5$

האיבר ה- n מייצג את סכום n האיברים הראשונים בסדרת המספרים הטבעיים.

כלומר: $a_n=\frac{(1+n)\cdot n}{2}$

אך ישנה חוקיות נוספת!

מספר משולש n מייצג את כמות הזוגות שניתן לבחור מתוך $n+1$ מספרים או אובייקטים.

לדוגמה: $n=3$, המספר המשולש השלישי, זהו המספר 6.

$n+1=4$ ומכאן ש- 6 הוא מספר האפשרויות לבחור זוגות מתוך 4 איברים שונים. נראה כיצד מגיעים למספר זה:

קבוצת האיברים: א , ב , ג , ד

קבוצת הזוגות האפשריים:

א ב , א ג , א ד , ב ג , ב ד , ג ד.

סה"כ: 6 אפשרויות!

<u>שאלות לחקירה:</u>

1. האם סכום מספרים משולשים הוא בהכרח מספר משולש?
2. האם מכפלת מספרים משולשים היא בהכרח מספר משולש?

<u>תשובות לשאלות החקר:</u>

1. התשובה היא לא בהכרח!

הסבר, נייצג שני מספרים משולשים:

$$a_n=\frac{(1+n)n}{2}$$
$$a_p=\frac{(1+p)p}{2}$$

נבנה את סכומם:

$$a_n+a_p=\frac{(1+n)n}{2}+\frac{(1+p)p}{2}=\frac{(1+n)n+(1+p)p}{2}=$$

$$=\frac{n+n^2+p+p^2}{2}=\frac{n^2+p^2+n+p}{2}=$$
$$=\frac{(n+p)^2-2np+(n+p)}{2}=$$
$$=\frac{(n+p)(n+p+1)-2np}{2}=$$
$$=\frac{(n+p)(n+p+1)}{2}-np$$

הגורם הראשון הוא מספר משולש היות וניתן לסמן: $n+p=t$

ואז השבר הראשון הוא: $\frac{(1+t)t}{2}$ וזוהי התבנית לכל מספר משולש.

אך אנו מחסרים ממנו מספר מלבני . התשובה אינה בהכרח מספר משולש.

דוגמה ראשונה:

$$n=3 \qquad a_3=\frac{(1+3)3}{2}=6$$
$$p=5 \qquad a_5=\frac{(1+5)5}{2}=15$$
$$a_3+a_5=6+15=21=a_6$$

סכום שני המספרים המשולשים הוא אכן מספר משולש.

דוגמה שנייה:

$$n=5 \qquad a_5=\frac{(1+5)5}{2}=15$$
$$p=8 \qquad a_8=\frac{(1+8)8}{2}=36$$
$$a_5+a_8=15+36=51$$

51 אינו מספר משולש.

ננסה לבנות הכללה למקרים בהם התוצאה תהיה מספר משולש.

$$a_n=\frac{(1+n)n}{2}$$
$$a_p=\frac{(1+p)p}{2}$$
$$a_n+a_p=\frac{(1+n)n+(1+p)p}{2}$$

כדי שהתוצאה תהיה מספר משולש, חייב להיות מספר שלם q עבורו יתקיים:

$$\frac{(1+n)n+(1+p)p}{2}=\frac{(1+q)q}{2}$$

נפשט את התנאי:

$$(1+n)\,n+(1+p)\,p=(1+q)\,q$$
$$n+n^2+p+p^2=q+q^2$$
$$\Downarrow$$
$$q^2+q-\left(n+p+n^2+p^2\right)=0$$

כדי שתתקבל התשובה הרצויה, כאשר n ו- p ידועים, q צריך להיות מספר שלם וחיובי!

בדוגמה הראשונה:

$$n=3$$
$$p=5$$
$$q^2+q-\left(3+5+3^2+5^2\right)=0$$
$$q^2+q-42=0$$
$$(q-6)(q+7)=0$$
$$q=6$$

קיבלנו פתרון שלם וחיובי, וזהו אכן המספר המשולש שהתקבל!

2. התשובה היא לא בהכרח!

ניסוי יראה כי בדרך כלל המכפלה אינה מספר משולש.

ננסה לבדוק את ההכללה:

$$a_n = \frac{(1+n)n}{2}$$
$$a_p = \frac{(1+p)p}{2}$$
$$a_n \cdot a_p = \frac{(1+n)n(1+p)p}{2 \cdot 2} = \frac{[(1+n)(1+p)]np}{4} =$$
$$= \frac{(1+n+p+np)np}{4}$$

כדי שהתוצאה תהיה מספר משולש, חייב להיות מספר שלם q עבורו יתקיים:

$$\frac{(1+n+p+np)np}{4} = \frac{(1+q)q}{2}$$

נפשט את התנאי:

$$(1+n+p+np)np = 2q^2 + 2q$$
$$2q^2 + 2q - (1+n+p+np)np = 0$$

כדי שתתקבל התשובה הרצויה, כאשר n ו- p ידועים, q צריך להיות מספר שלם וחיובי!

דוגמה:

$$n = 2$$
$$p = 5$$
$$2q^2 + 2q - (1+2+5+10)10 = 0 \quad /:2$$
$$q^2 + q - 90 = 0$$
$$(q-9)(q+10) = 0$$
$$q = 9$$

נציב ונראה כי התשובה שמצאנו אכן מתאימה:

$$a_2=\frac{(1+2)2}{2}=3$$

$$a_5=\frac{(1+5)5}{2}=15$$

$$a_2\cdot a_5=3\cdot 15=45=a_9$$

<u>מספרים מושלמים (perfect numbers):</u>

מספר מושלם הוא מספר השווה לסכום גורמיו הראשוניים.

דוגמה:

$$6:\ 1,2,3$$

$$1+2+3=6$$

משפט היסוד של רימן: ייצוג של גורמים ראשוניים למספר, הוא יחיד.

נתבונן במספרים מושלמים נוספים (ניתן לתת לתלמידים את המשימה לחפש מספרים מושלמים):

$$28:\ 1,2,4,7,14$$

$$1+2+4+7+14=28$$

$$496:\ 1,2,4,8,16,31,62,124,248$$

$$1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$$

מספר מושלם הוא בעל "איזון" פנימי. אין תשובה לשאלה האם כמות המספרים המושלמים היא סופית.

אף אחד לא מצא מספר מושלם אי-זוגי!

משימה נחמדה בסדרת מספרים:

נתבונן בסדרה הבאה: $1,5,9,13,17,21,.......$

הסדרה מיוצגת על-ידי התבנית: $a_n=1+4n$

כאשר: $n=0,1,2,3....$

תכונות שניתן לראות בקלות:

1. כל איברי הסדרה הינם מספרים אי-זוגיים.
2. סכום כל שני איברים בסדרה הוא מספר זוגי.

נבדוק תכונות נוספות:

1. האם מכפלת שני איברים בסדרה היא איבר בסדרה?
2. האם כל איבר בסדרה ניתן להצגה כמכפלת שני איברים אחרים בסדרה?

נחפש תשובה לשאלה הראשונה:

1. הניסיון מראה כי כל מכפלה כזו היא איבר בסדרה.

דוגמאות:

$5\cdot 21=105 \qquad 105=1+26\cdot 4$

$9\cdot 17=153 \qquad 153=1+38\cdot 4$

כיצד נוכיח זאת במקרה הכללי?

נעבור להוכחה:

$$a_n=1+4n$$
$$a_p=1+4p$$
$$a_n\cdot a_p=(1+4n)(1+4p)=1+4p+4n+16np=$$
$$=1+(p+n+4np)4$$

היות ו- n, p הינם מספרים שלמים, הביטוי בסוגרים הוא מספר שלם ולכן התבנית מבטאת מספר השייך לסדרה!

2. הניסיון מראה כי ישנם, לפעמים, ייצוגים שונים. כך למשל:

$$n=173 \qquad \Rightarrow a_{173}=1+173\cdot 4=693$$
$$a_{173}=693=21\cdot 33=(1+5\cdot 4)(1+8\cdot 4)=a_5\cdot a_8$$
$$a_{173}=693=9\cdot 77=(1+2\cdot 4)(1+19\cdot 4)=a_4\cdot a_{19}$$

<u>מספרים מוכפלים (factorial numbers):</u>

$$1=1$$
$$1\cdot 2=2$$
$$1\cdot 2\cdot 3=6$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$$

מספרים אלה הינם "מספרי עצרת" ומסומנים באופן הבא:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\ldots \cdot n=n!$$

קצב גידול מספרים מוכפלים הוא מהיר מאד.

סימן העצרת ! הומצא על-ידי כריסטיאן קראמפ (Christian Krempe) בשנת 1808 כאות אזהרה למספרים בעלי קצב גידול מהיר מאד.

לצורך המחשת הקצב המהיר שימו לב כי: $10!=3,628,800$.