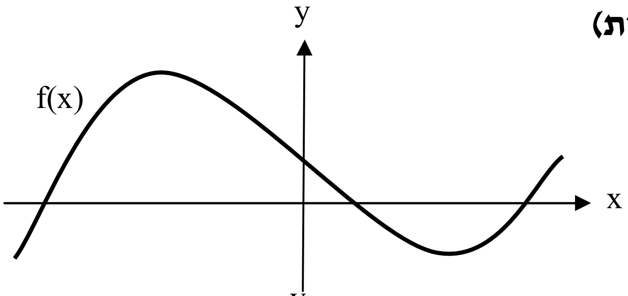
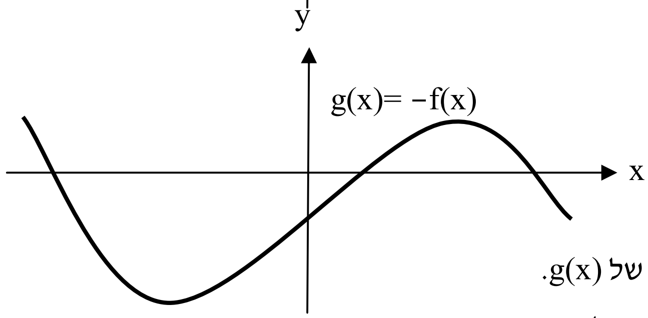
טרנספורמציות של פונקציות

שיקוף ביחס לציר x : $-f(x)$ (הפונקציה הנגדית)



נתון גרף של הפונקציה $f(x)$.

נגדיר פונקציה חדשה : $g(x)= -f(x)$

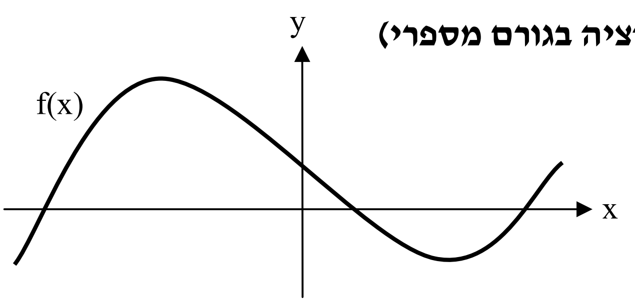


אם נתבונן בגרפים של שתי הפונקציות,
נראה שהגרף החדש הוא שיקוף של הגרף
המקורי ביחס לציר ה-x , כלומר לכל נקודה
על גרף $f(x)$ יש נקודה סימטרית ביחס לציר x על הגרף של $g(x)$.

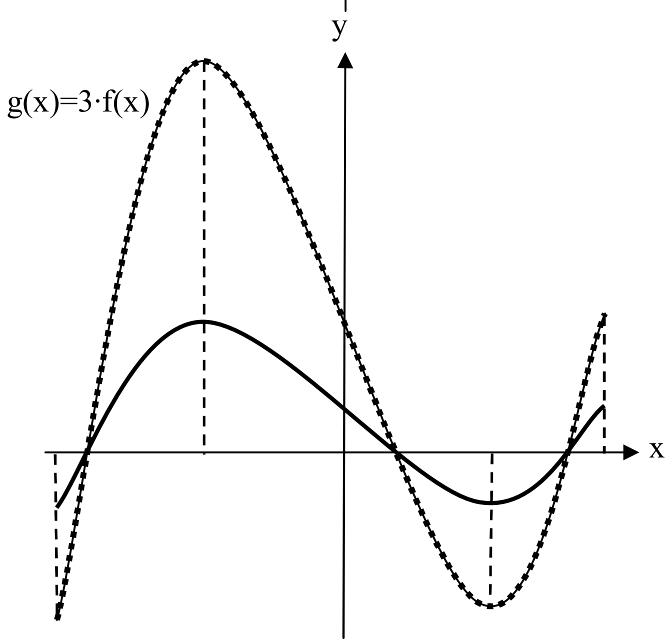
$\mathbf{(x,y) \to (x, -y)}$ (בכל נקודה שיעור ה-y מוחלף בנגדי שלו).

שיעורי נקודות החיתוך עם ציר x השתנו. הם שיקוף ביחס לציר ה-x. נקודות החיתוך עם ציר x לא השתנו.

מתיחה/ כיווץ אנכיים : $k\cdot f(x)$ (הכפלת הפונקציה בגורם מספרי)



נתון גרף של הפונקציה $f(x)$.



נגדיר פונקציה חדשה : $g(x)=3\cdot f(x)$

אם נתבונן בגרפים של שתי הפונקציות,
נראה שהגרף החדש הוא "מתיחה" אנכית של הגרף
המקורי.

$(x,y) \to (x, 3y)$

שיעור ה-y של כל נקודה על $g(x)$,
גדול פי 3 משיעור ה-y המתאים של
נקודה על $f(x)$ בעלת אותו שיעור x.
לפיכך, נקודות החיתוך עם ציר x לא השתנו.

באופן כללי עבור הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$ השינוי הוא : $\mathbf{(x,y) \to (x, ky)}$

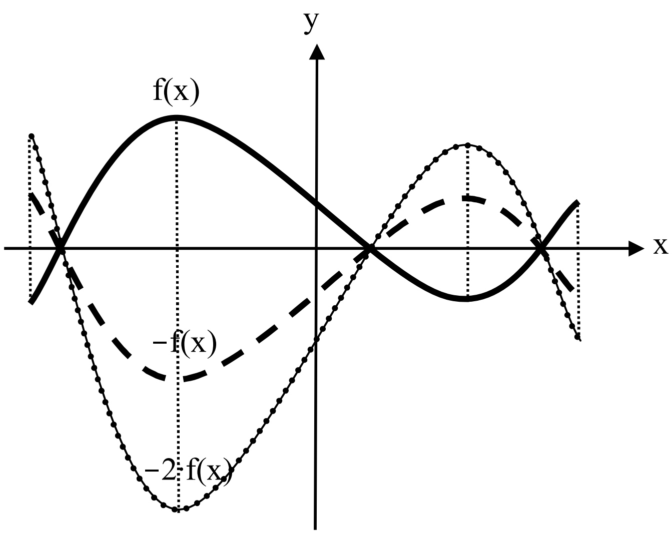
כאשר k הוא מספר שלילי, בנוסף ל"מתיחה", הסימנים של הפונקציה משתנים. ניתן לראות את השינוי בגרף כשילוב של כפל במספר חיובי הגורם למתיחה אנכית ושל שיקוף ביחס לציר x .

נתבונן בפונקציה $g(x)=-2\cdot f(x)$

נוכל לראות שהגרף שלה התקבל משני שלבים :

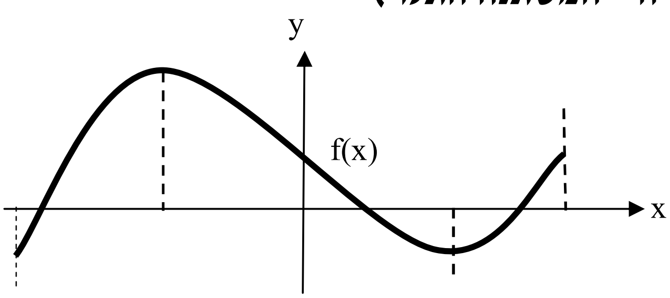
א. שיקוף ביחס לציר x   ב. כפל ב-2

(או בסדר הפוך)



הזזה אנכית : $f(x)+a$ (הוספת מספר לפונקציה – המשתנה התלוי)

נתון גרף הפונקציה $f(x)$

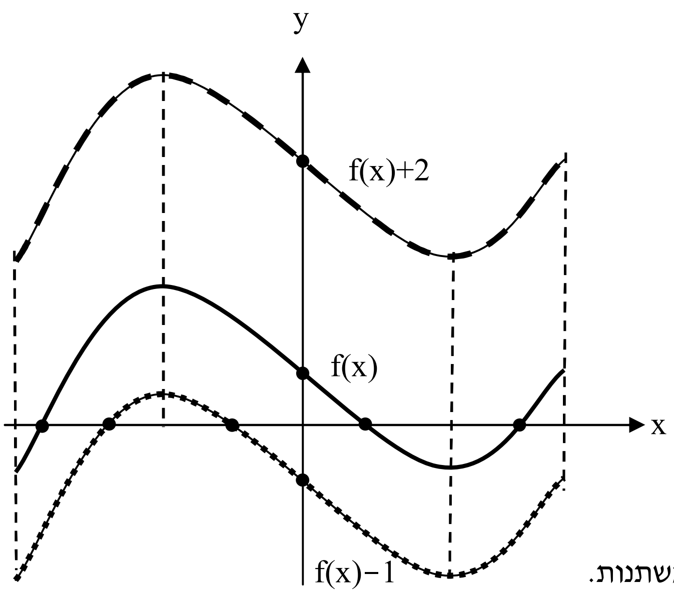


בשרטוט מופיעים הגרפים של הפונקציות $f(x)+2$, $f(x)-1$ וגרף הפונקציה המקורית.

הוספת מספר לפונקציה לא משנה את צורת הפונקציה, אך גורמת ל**הזזה אנכית** של הגרף :

כאשר $a > 0$ כלפי מעלה, כאשר $a < 0$ כלפי מטה.

$\mathbf{(x,y) \to (x, y+a)}$



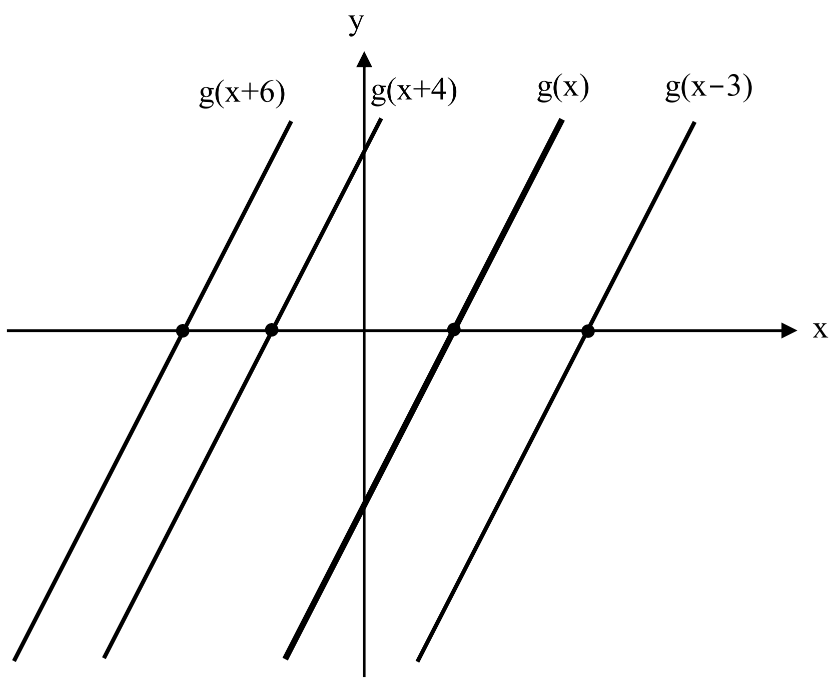
חשוב לשים לב :שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-x משתנות.

עבור פרבולה, הוספה כנ"ל היא למעשה שינוי של **הפרמטר c** (האיבר החופשי) .

הזזה אופקית : $f(x+a)$ (הוספת מספר למשתנה הבלתי תלוי)

כדי לבדוק את ההשפעה של הוספת מספר למשתנה הבלתי תלוי על גרף הפונקציה, נתבונן בגרף של פונקציות מוכרות –קו ישר ופרבולה.

1. הפונקציה $g(x)=2x-4$ היא פונקציה ליניארית (ממעלה ראשונה) שהגרף שלה הוא קו ישר. זהו קו עולה (שיפועו חיובי) חותך את ציר ה-x בנקודה 2 וחותך את ציר ה-y בנקודה 4-.



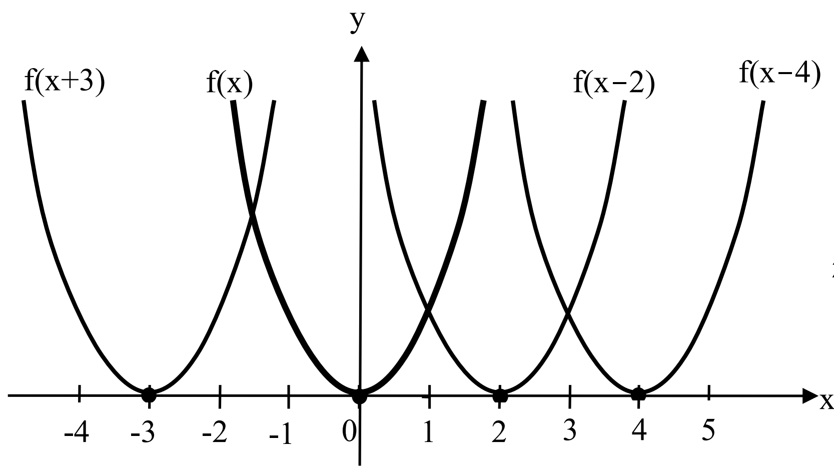
נתבונן בפונקציות:
$g(x+4)$, $g(x+6)$, $g(x-3)$.
פונקציות אלה מתקבלות כאשר במקום המשתנה x מציבים בפונקציה המקורית $x+4$, $x+6$, $x-3$ בהתאמה.

$g(x+4) = 2(x+4)-4 = 2x+4$. הגרף של פונקציה זו הוא קו ישר ששיפועו 2, חותך את ציר ה-x בנקודה $(-2,0)$. כלומר מקביל לישר המקורי וזז שמאלה ב-4 יחידות.

$g(x+6) = 2(x+6)-4 = 2x+8$. הגרף של פונקציה זו הוא קו ישר ששיפועו 2, חותך את ציר ה-x בנקודה $(-4,0)$, כלומר מקביל לישר המקורי וזז שמאלה ב-6 יחידות.

$g(x-3) = 2(x-3)-4 = 2x-10$. הגרף של פונקציה זו הוא קו ישר ששיפועו 2, חותך את ציר ה-x בנקודה $(5,0)$, כלומר מקביל לישר המקורי וזז ימינה ב-3 יחידות.

2. הפונקציה $f(x) = x^2$ היא פרבולה ישרה שקודקודה בראשית הצירים (0,0).



נתבונן בפונקציות:
$f(x-4)$, $f(x-2)$, $f(x+3)$.

פונקציות אלה מתקבלות כאשר במקום המשתנה x מציבים בפונקציה המקורית x-4, x-2, x+3 בהתאמה.

$f(x+3) = (x+3)^2$.

הגרף של פונקציה זו היא פרבולה שקודקודה הוא בנקודה (−3,0), כלומר תזוזה שמאלה ב-3 יחידות.

$f(x-2) = (x-2)^2$.

הגרף של פונקציה זו היא פרבולה שקודקודה הוא בנקודה (2,0), כלומר תזוזה ימינה ב-2 יחידות.

$f(x-4) = (x-4)^2$.

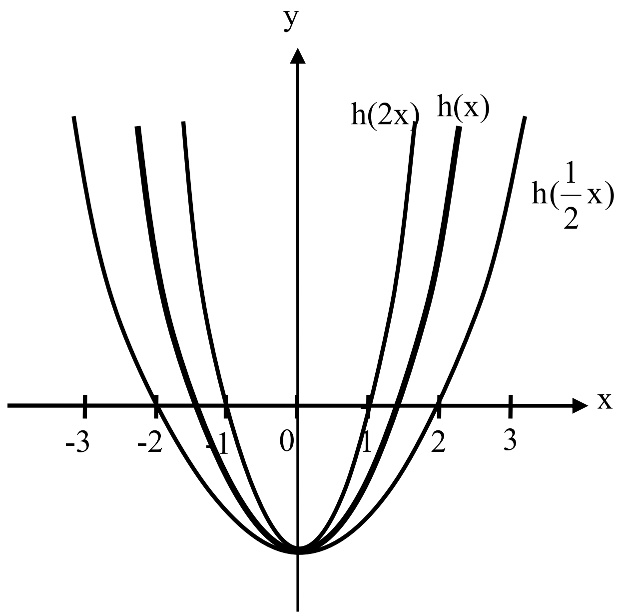
הגרף של פונקציה זו היא פרבולה שקודקודה הוא בנקודה (4,0), כלומר תזוזה ימינה ב-4 יחידות.

הצורה הכללית של גרף הפונקציה לא השתנתה, אך ניתן לראות ש:
גרף הפונקציה f(x+a) מתקבל מגרף הפונקציה f(x) על ידי הזזה שמאלה ב-a יחידות כאשר $a > 0$,
והזזה ימינה ב-a יחידות כאשר $a < 0$.

מתיחה/ כיווץ אופקיים: f(kx) (הכפלת המשתנה הבלתי תלוי בגורם מספרי)

כדי לבדוק את ההשפעה של הכפלת המשתנה הבלתי תלוי על גרף הפונקציה, נתבונן בגרף של פונקציה מוכרות – פרבולה.

1. הפונקציה $h(x) = x^2 - 2$ היא פונקציה ריבועית שהגרף שלה הוא פרבולה שקודקודה בנקודה (0,-2)
וחותכת את ציר ה-x בנקודות $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$.



נתבונן בפונקציות :

. $h(\frac{1}{2}x)$,$h(2x)$

פונקציות אלה מתקבלות כאשר

במקום המשתנה x מציבים

בפונקציה המקורית

$2x$, $\frac{1}{2}x$, בהתאמה.

$h(2x) = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$. הגרף של פונקציה זו הוא פרבולה שקודקודה בנקודה (0,-2)

וחותכת את ציר ה-x בנקודות (1,0) , (-1,0). שיעורי ה-x של הנקודות הוכפלו ב-1/2.

$h(\frac{1}{2}x) = (\frac{1}{2}x)^2 - 2 = \frac{1}{4}x^2 - 2$. הגרף של פונקציה זו הוא פרבולה שקודקודה בנקודה (0,-2)

וחותכת את ציר ה-x בנקודות (2,0) , (-2,0). שיעורי ה-x של הנקודות הוכפלו ב-2.

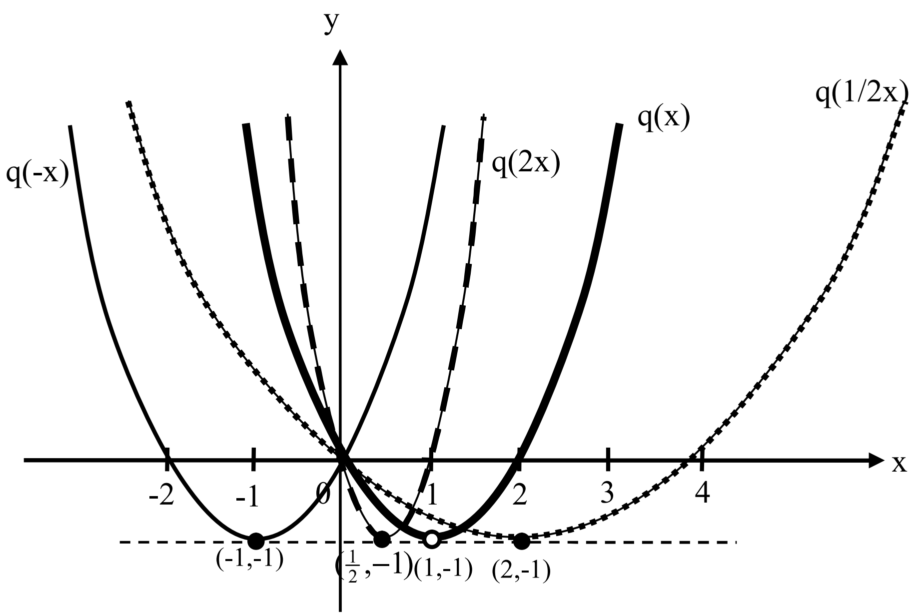
כדאי לשים לב שבמקרה זה, הפונקציה h(-x) זהה לפונקציה המקורית, ולכן כל הנאמר לגביה תקף.

3. הפונקציה $q(x) = x^2 - 2x$ היא פונקציה ריבועית שהגרף שלה הוא פרבולה שקודקודה בנקודה (1,-1) וחותכת את ציר ה-x בנקודות (2,0) , (0,0).

נתבונן בפונקציות : $h(2x)$, $h(\frac{1}{2}x)$, $h(-x)$.

פונקציות אלה מתקבלות כאשר במקום המשתנה x מציבים בפונקציה המקורית $2x$, $\frac{1}{2}x$, $-x$,

בהתאמה.



$q(2x)=(2x)^2-2(2x)=4x^2-4x$. הגרף של פונקציה זו הוא פרבולה ישרה שקודקודה בנקודה $(\frac{1}{2},-1)$ וחותכת את ציר ה-x בנקודות $(1,0)$, $(0,0)$. שיעורי ה-x של הנקודות הוכפלו ב-1/2.

$h(\frac{1}{2}x)=(\frac{1}{2}x)^2-2(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{4}x^2-x$. הגרף של פונקציה זו הוא פרבולה ישרה שקודקודה בנקודה $(2,0)$ וחותכת את ציר ה-x בנקודות $(4,0)$, $(0,0)$. שיעורי ה-x של הנקודות הוכפלו ב-2.

$q(-x)=(-x)^2-2(-x)=4x^2+4x$. הגרף של פונקציה זו הוא פרבולה ישרה שקודקודה בנקודה $(-1,-1)$ וחותכת את ציר ה-x בנקודות $(-2,0)$, $(0,0)$. שיעורי ה-x של הנקודות הוכפלו ב-(-1) .

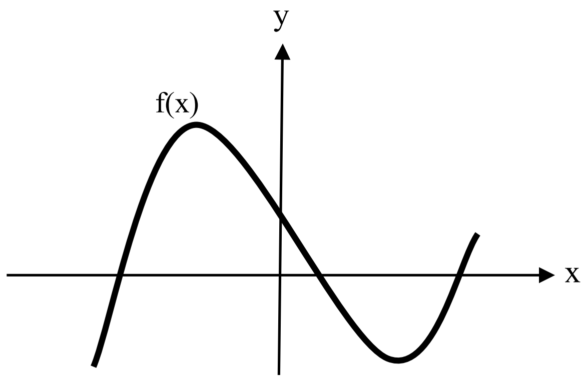
דיון:

אם נתונה **פונקציה ריבועית** $f(x)=ax^2+bx+c$ שנקודות החיתוך שלה עם ציר x הן x_1 ו- x_2 , ושיעורי נקודת הקודקוד שלה (x_m , y_m) , ומגדירים פונקציה חדשה $g(x) = f(kx)$, הרי שנקודות החיתוך שלה עם ציר x יהיו $\frac{x_1}{k}$ ו- $\frac{x_2}{k}$, ושיעורי נקודת הקודקוד שלה יהיו $(\frac{x_m}{k}, y_m)$. נקודות הקודקוד של כל משפחת הפונקציות הללו ושל הפונקציה המקורית נמצאות על ישר מקביל לציר x.

קל יהיה לראות את הנ"ל, אם נרשום: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, $g(x)=f(kx)=a(kx-x_1)(kx-x_2)$

באופן כללי, אם נתבונן בגרפים של שתי הפונקציות, נראה שהגרף החדש הוא "מתיחה" (או כיווץ) בכיוון אופקי של גרף הפונקציה המקורית. $\mathbf{(x,y)\to(x/k,\ y)}$ (חשוב: נקודת החיתוך עם ציר y אינה משתנה).
באופן פרטי, כאשר $k=-1$, גרף הפונקציה $\mathbf{f(-x)}$ היא שיקוף ביחס לציר y. $\mathbf{(x,y)\to(-x,\ y)}$

בשרטוט מופיע גרף הפונקציה f(x)



בשרטוט מופיעים גם חלקי הגרפים המתאימים של הפונקציות:

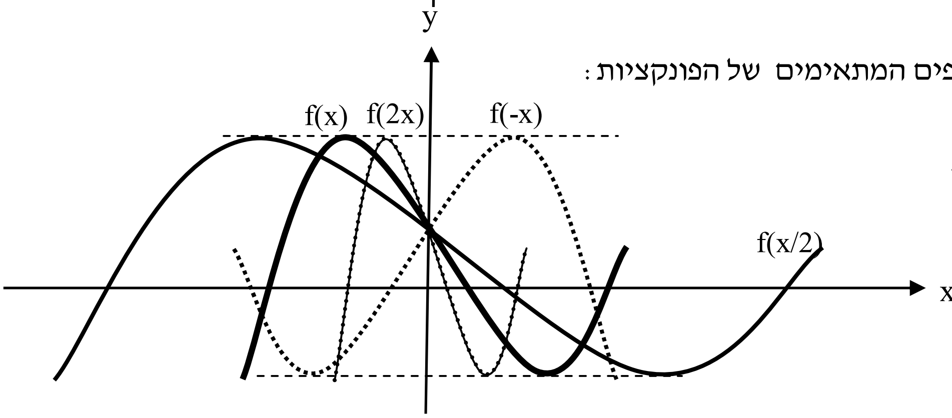
f(2x) ,f(-x) ,f(x/2)

פונקציות אלה מתקבלות כאשר

במקום המשתנה x מציבים

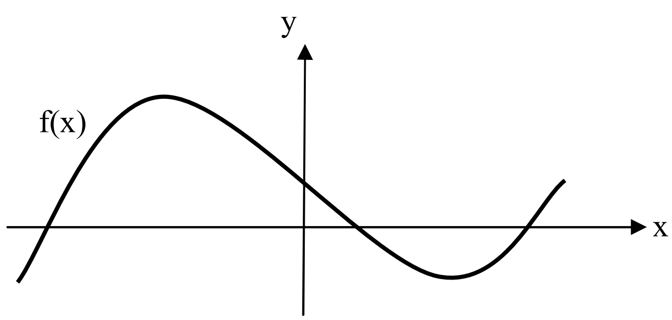
בפונקציה המקורית

$2x$,$-x$,$\frac{1}{2}x$, בהתאמה.



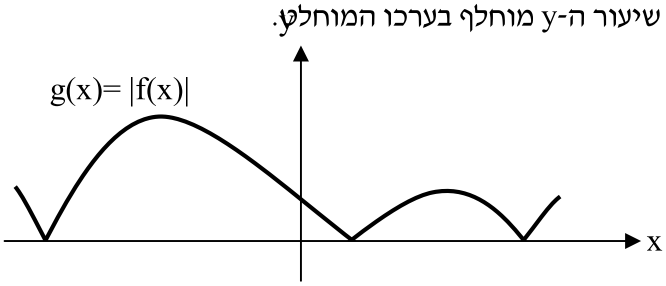
ערך מוחלט של פונקציה |f(x)|

נתון גרף של הפונקציה f(x).



תזכורת: ערך מוחלט הוא מספר לא שלילי. ערך מוחלט של מספר חיובי שווה למספר עצמו, ערך מוחלט של מספר שלילי שווה לנגדי של המספר ו"מבטל" את סימנו השלילי והופך אותו לחיובי.

נגדיר פונקציה חדשה: g(x)= |f(x)| בכל נקודה שיעור ה-y מוחלף בערכו המוחלט.



אם נתבונן בגרפים של שתי הפונקציות,

נראה שהגרף החדש נמצא כולו על ציר ה-x

או מעליו, כלומר, שיעורי ה-y של נקודותיו

הם מספרים חיוביים בלבד.

$(x,y) \rightarrow (x, |y|)$

כל החלקים החיוביים של הגרף (מעל ציר x) נשארו, ואילו החלקים השליליים של הגרף (מתחת ציר x).