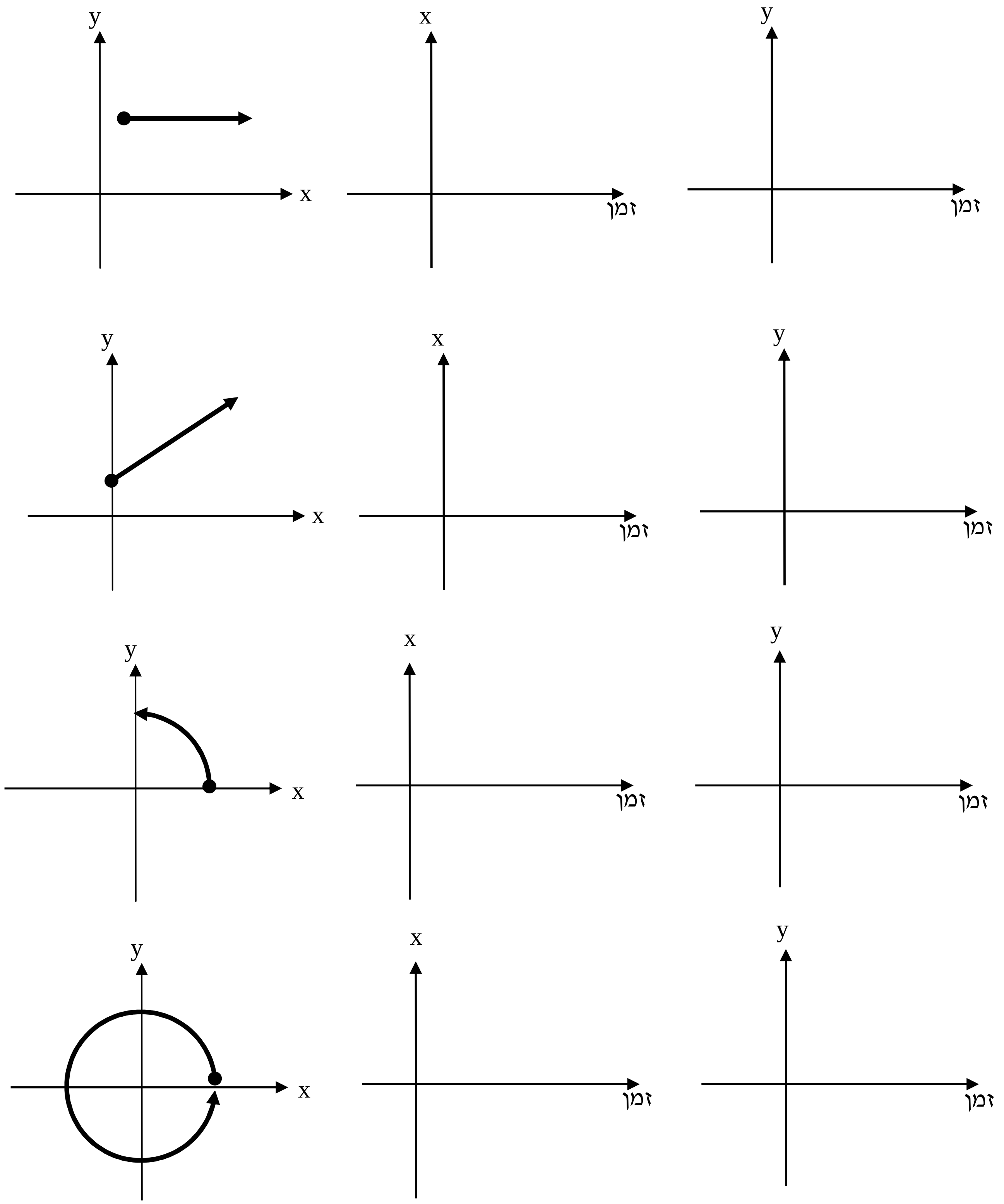
תנועה במישור

1. לפניכם ציורים של מסלולים שונים של גוף נע במישור. הנקודה מסמנת את תחילת המסלול, החץ את כיוונו.

שרטטו את הגרפים המתארים את השתנות שיעורי ה-x וה-y בכל מסלול במשך הזמן.

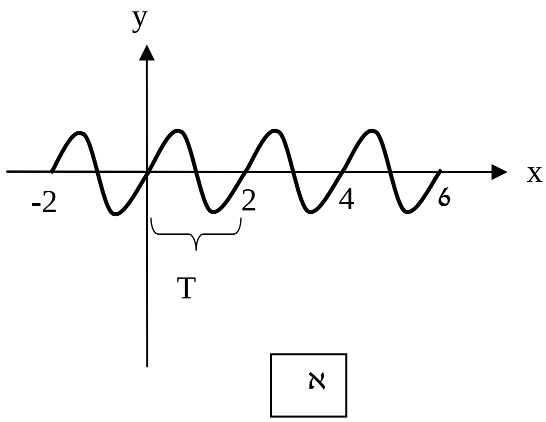


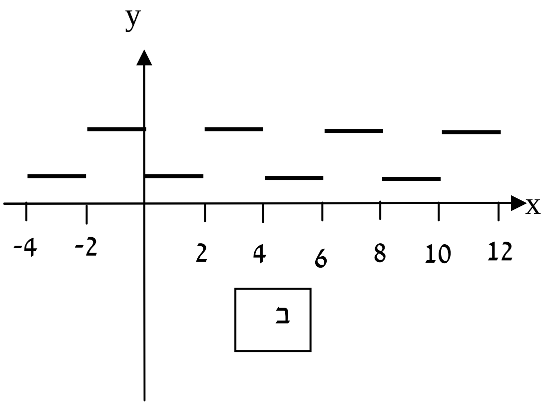
פונקציה מחזורית

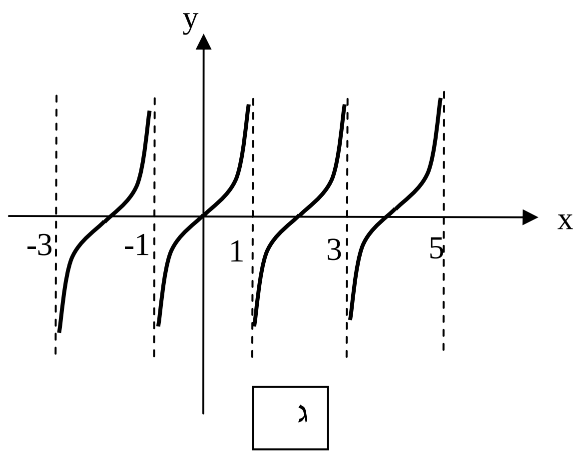
2. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

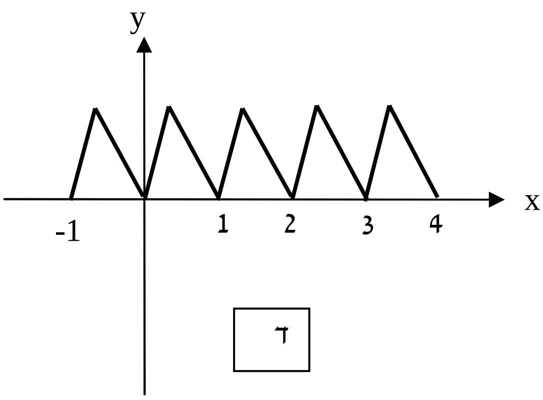
א. סמנו בצבע את חלק הגרף הקטן ביותר החוזר על עצמו. האם ישנן אפשרויות אחרות?

ב. קבעו את אורך המחזור.









3. שרטטו פונקציה מחזורית שאורך המחזור שלה: א. 3 ב. 5 ג. 1

זווית ומידת סיבוב

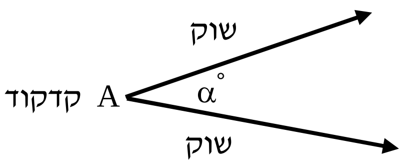
זווית

זווית נוצרת משתי קרניים היוצאות מנקודה משותפת.

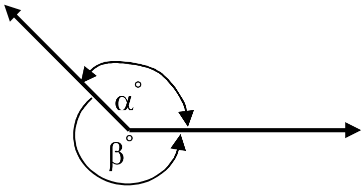
הנקודה ממנה יוצאות הקרניים נקראת **קודקוד.**

הקרניים נקראות **שוקי הזווית.**

נהוג למדוד זוויות ביחידות הנקראות **מעלות.**

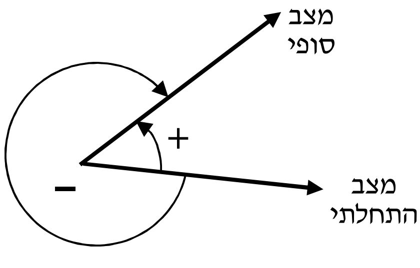


שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת יוצרות שתי זוויות שסכומן הוא 360°.



מידת סיבוב

סיבוב - תנועה של קרן ממצב התחלתי אל מצב סופי כשהקודקוד נשאר במקומו.



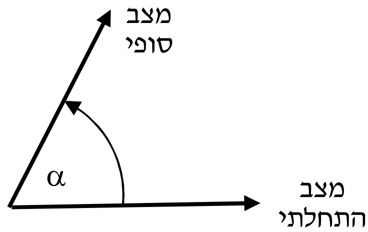
<u>הגדרה</u>

סיבוב חיובי - סיבוב נגד כיוון השעון

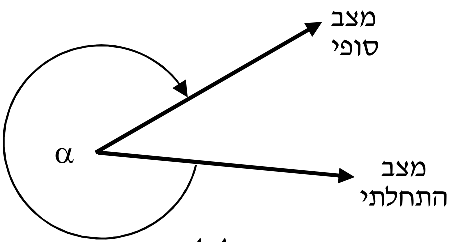
סיבוב שלילי – סיבוב עם כיוון השעון

סיבוב שלם הוא 360° (או -360°)

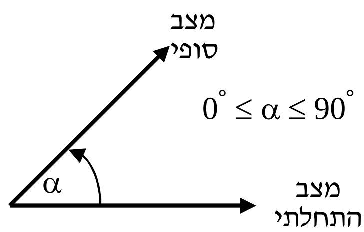
<u>דוגמאות</u>:

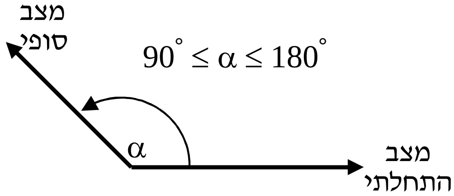


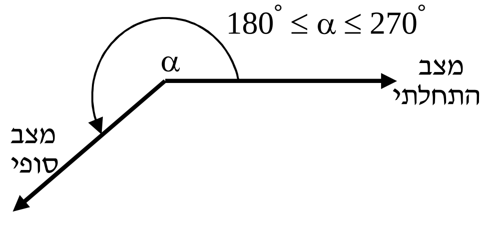
α חיובית

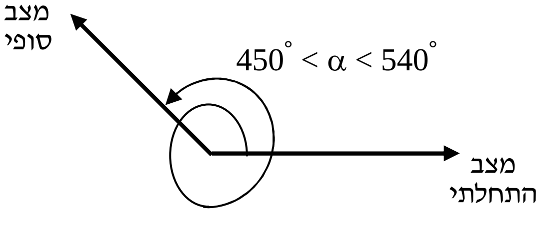


α שלילית





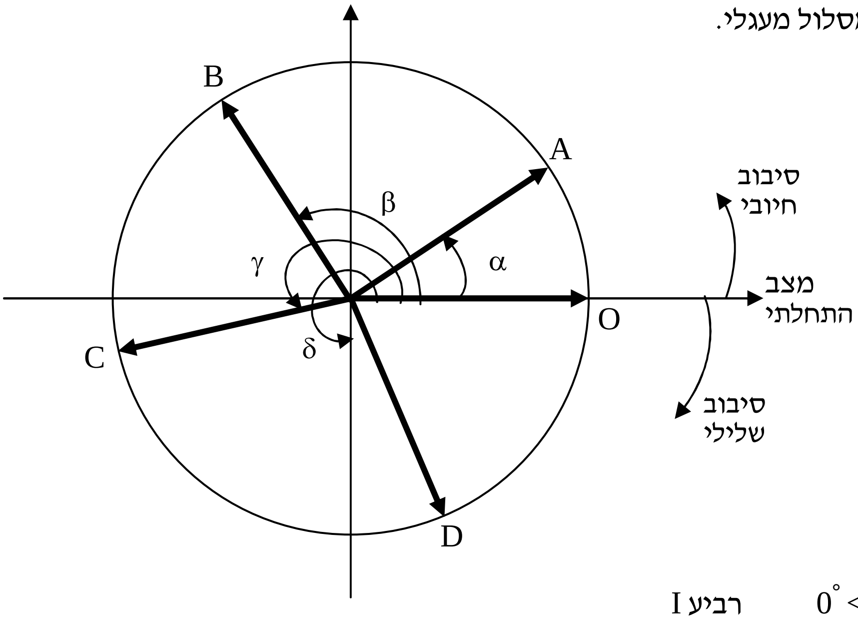




סיבוב במערכת צירים

מחוג נמצא במצב התחלתי כשהוא מונח על הכיוון החיובי של ציר ה - x.

כשהמחוג מסתובב, קצהו יוצר מסלול מעגלי.



בסיבוב A :	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	רביע I
בסיבוב B :	$90^\circ < \beta < 180^\circ$	רביע II
בסיבוב C :	$180^\circ < \gamma < 270^\circ$	רביע III
בסיבוב D :	$270^\circ < \delta < 360^\circ$	רביע IV

תרגילים:

4. תנו שלוש דוגמאות שונות למידות סיבוב שעונות על התנאים הבאים :
   א. חיובית ומצב סופי ברביע II .
   ב. שלילית ומצב סופי ברביע IV.
   ג. חיובית ומצב סופי ברביע III.
   ד. שלילית ומצב סופי ברביע I.

5. מחוג נמצא במצב התחלתי כשהוא מונח על הכיוון החיובי של ציר ה - x.
   באיזה רביע ימצא לאחר כל אחד מהסיבובי הבאים?
   א. 370° ב. 520° ג. -600° ד. -820° ה. ¾3 סיבובים שלמים

הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$

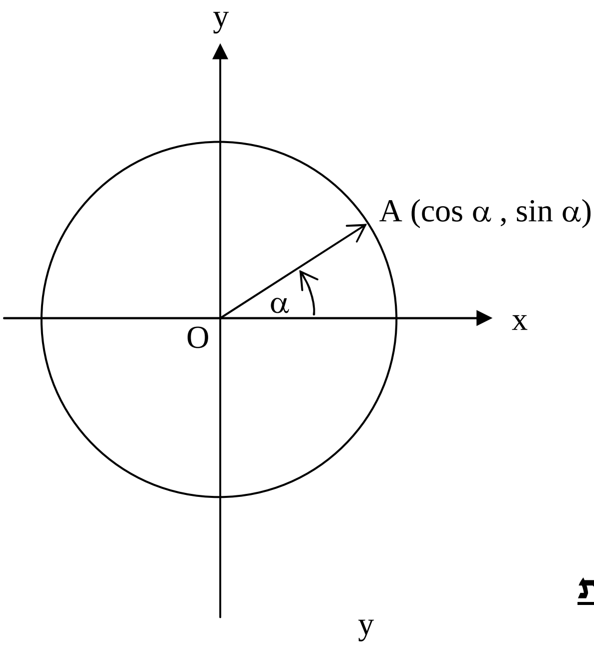
הגדרה

נתבונן במעגל שמרכזו O בראשית הצירים.
נקבע את אורך הרדיוס של המעגל כ-1 יחידה.
כל תנועה של מחוג המעגל נגד כיוון השעון קובעת
נקודה (x,y) על המעגל וזווית α בין מחוג המעגל והכיוון
החיובי של ציר x.

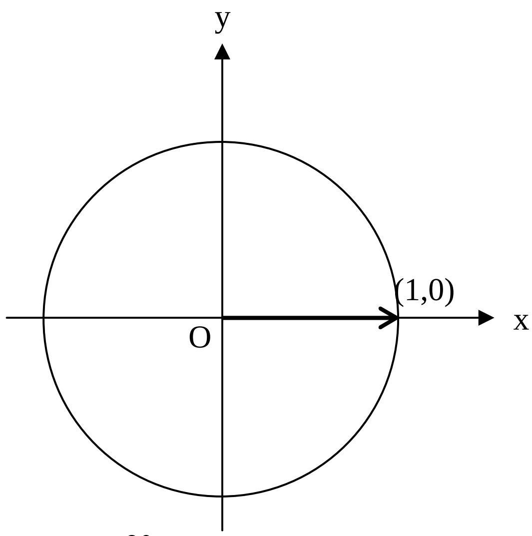
נגדיר: **סינוס של α הוא שיעור ה- y של נקודה A**

קוסינוס של α הוא שיעור ה- x של נקודה A

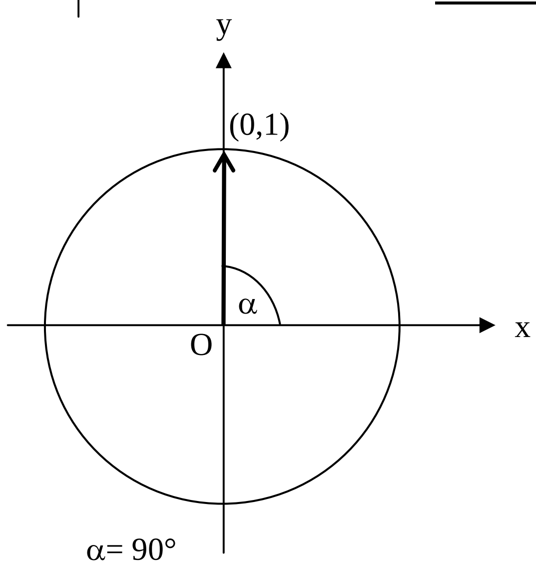
$$A\,(x\,,\,y) = (\cos\alpha\,,\,\sin\alpha)$$



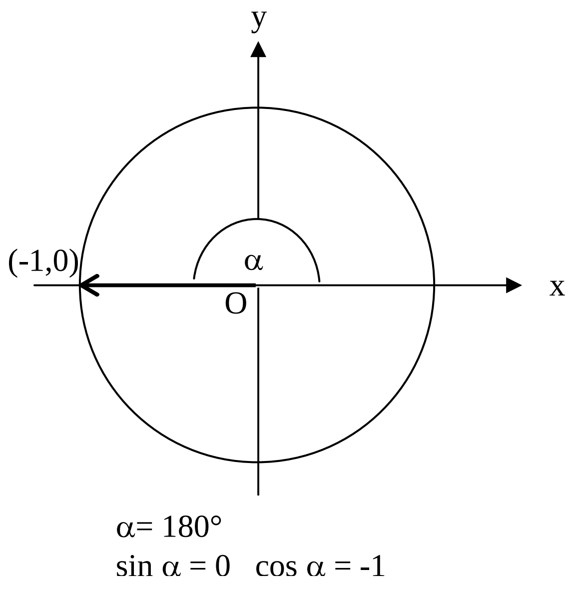
הערכים של סינוס ושל קוסינוס עבור זוויות מיוחדות



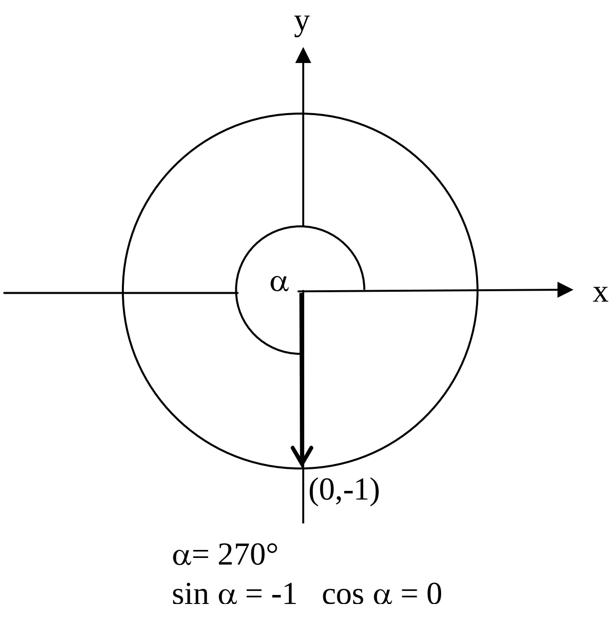
$\alpha = 0°$
$\sin\alpha = 0 \quad \cos\alpha = 1$



$\alpha = 90°$
$\sin\alpha = 1 \quad \cos\alpha = 0$



$\alpha = 180°$
$\sin\alpha = 0 \quad \cos\alpha = -1$



$\alpha = 270°$
$\sin\alpha = -1 \quad \cos\alpha = 0$

טווח הערכים של סינוס ושל קוסינוס

שיעורי הנקודות הנמצאות על מעגל שרדיוסו 1 יחידה, הן x והן y, יכולים לקבל ערכים בין 1- עד 1+.
לכן, כיון שהפונקציות סינוס וקוסינוס מזוהות עם שיעורי הנקודות:

$$-1 \le \sin\alpha \le +1 \qquad -1 \le \cos\alpha \le +1$$

מחזוריות

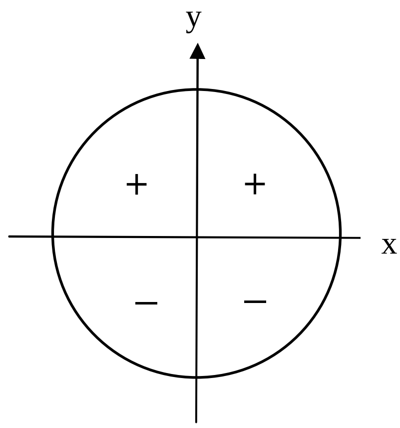
הערכים של סינוס וקוסינוס חוזרים על עצמם כל סיבוב שלם, כלומר המחזור שלהם הוא 360°).

דוגמאות: $\sin 50° = \sin 410° = \sin(-310°)$, $\cos 26° = \cos 386° = \cos 746°$

$\sin\alpha = \sin(\alpha+360°k)$ $\cos\alpha = \cos(\alpha+360°k)$ **כאשר k מספר שלם**

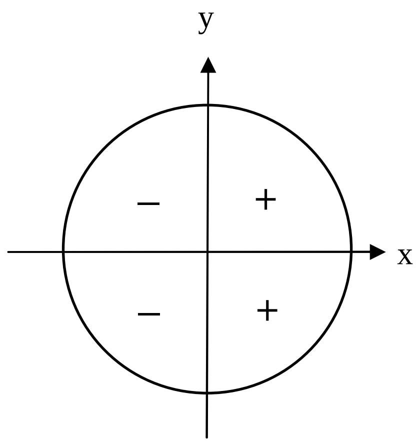
הסימנים של סינוס ושל קוסינוס ברביעים השונים

הסימנים של פונקצית הסינוס הם כסימני שיעור ה-y ברביעים השונים



sin α

הסימנים של פונקצית הקוסינוס הם כסימני שיעור ה-x ברביעים השונים



cos α

תרגילים

1. מצאו (ללא מחשבון) את הערך של sin x ו- cos x עבור ערכי x הבאים:

א. $x = 540°$ ג. $x = -180°$ ה. $x = -630°$

ב. $x = 450°$ ד. $x = 720°$ ו. $x = 1890°$

2. מצאו (ללא מחשבון) את הסימן של הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$ כאשר ערך ה - x הוא :

א. $54°$ ג. $240°$ ה. $-420°$

ב. $300°$ ד. $750°$ ו. $1000°$

3. מצאו את כל הערכים האפשריים של x כאשר $0 \le x \le 360°$

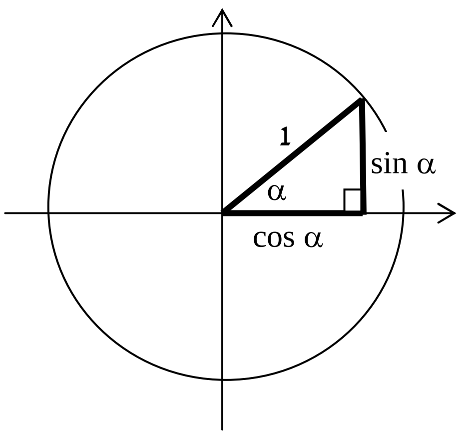
א. $\sin x = 0$ ג. $\sin x = 1$ ה. $\sin x = -1$

ב. $\cos x = 0$ ד. $\cos x =1$ ו. $\cos x = -1$

4. כמה פתרונות יש למשוואות הבאות כאשר $0 \le x \le 360°$ ובאילו רביעים נמצאים הפתרונות?

א. $\sin x = ¾$ ג. $\sin x = - 0.5$ ה. $\sin x = 1.2$

ב. $\cos x = 0.33$ ד. $\cos x = -0.7$ ו. $\cos x = -2.1$



<u>הקשרים בין סינוס וקוסינוס ברביעים השונים</u>

במעגל היחידה עשה מחוג שאורכו 1 סיבוב של α^o.

עפ"י משפט פיתגורס מתקיים :

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

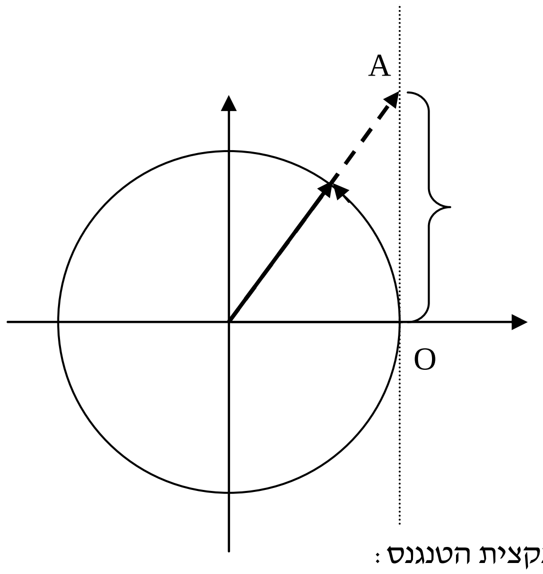
<u>תרגיל</u>

לפניכם ערכים נתונים של $\sin\alpha$ או של $\cos\alpha$. חשבו בכל מקרה, בלי לחשב את α, את הערך החסר של $\cos \alpha$ או $\sin \alpha$ (אם ישנן מס' אפשרויות, התייחסו לערך חיובי של הפונקציה המבוקשת).

א. $\sin \alpha = 0.8$ ב. $\cos \alpha = 5/13$ ג. $\sin \alpha = 0.5$

ד. $\cos \alpha = -1$ ה. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ו. $\sin \alpha = 2$

פונקצית הטנגנס ($tg\ \alpha$ או $\tan\ \alpha$)



הגדרה : טנגנס של α הוא היחס : $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

במעגל היחידה :

מעבירים משיק למעגל בנקודה (1,0)

ממשיכים את המחוג עד שהוא חותך את המשיק (נקודה A)

אורך הקטע OA הוא ערך הטנגנס של מידת הסיבוב α.

תרגיל

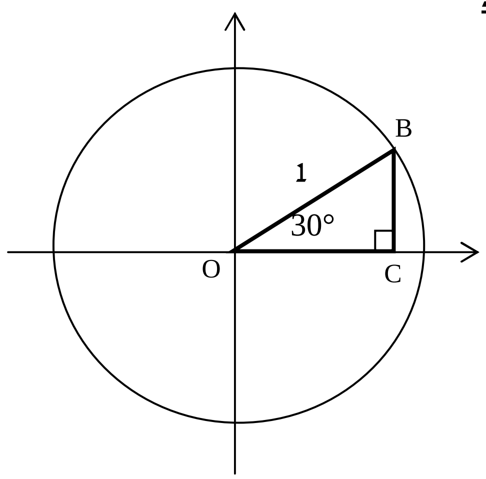
חיקרו, (בעזרת התכונות של $\sin\alpha$ ושל $\cos\alpha$), את תכונות פונקצית הטנגנס :

א. ערכי α עבורם $tg\ \alpha$ מתאפסת.

ב. סימני $tg\ \alpha$ ברביעים השונים.

ג. ערכי α עבורם $tg\ \alpha$ איננה מוגדרת.

הערכים של סינוס, קוסינוס וטנגנס עבור זוויות מיוחדות



$\alpha = 30°$

OAB הוא משולש ישר זווית שאורך היתר שלו OB הוא 1.

הניצב שמול הזווית בת 30° שווה למחצית היתר,

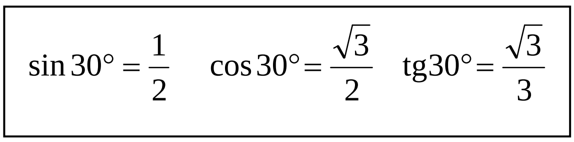
כלומר $BC = \sin 30° = 1/2$.

הוכח קודם ש- $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

נציב : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\cos 30°)^2 = 1$ נקבל : $(\cos 30°)^2 = \frac{3}{4}$

$\cos 30° > 0$ לכן $\cos 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

$$tg30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

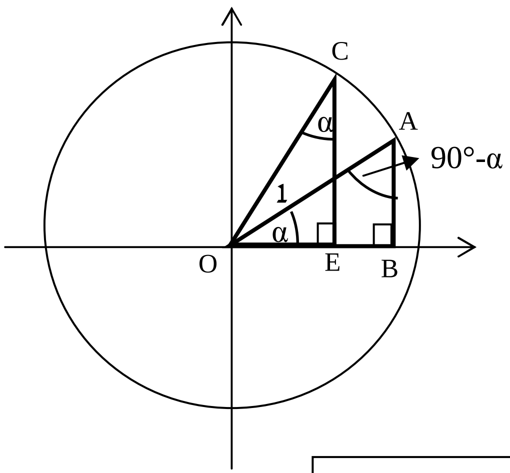


$$\sin 30° = \frac{1}{2} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

תרגיל

חשבו את הערכים של : $\sin 60°$, $\cos 60°$, $tg\ 60°$, $\sin 45°$, $\cos 45°$, $tg\ 45°$.

הקשר בין $\sin\alpha$ ו- $\cos(90°-\alpha)$, הקשר בין $\cos\alpha$ ו- $\sin(90°-\alpha)$



נתבונן במעגל שאורך רדיוסו הוא 1.

המחוג OA יוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר x,

והמחוג OC יוצר זווית $90°$-α עם הכיוון החיובי של ציר x.

כלומר: $\measuredangle AOB = \alpha$, $\measuredangle COE = 90° - \alpha$

$\Delta AOB \cong \Delta COE$ (הוכח!) $\Leftarrow$ $AB = OE$, $OB = CE$

$AB = \sin\alpha = OE = \cos(90° - \alpha)$

$OB = \cos\alpha = CE = \sin(90° - \alpha)$

$$\boxed{\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha}$$

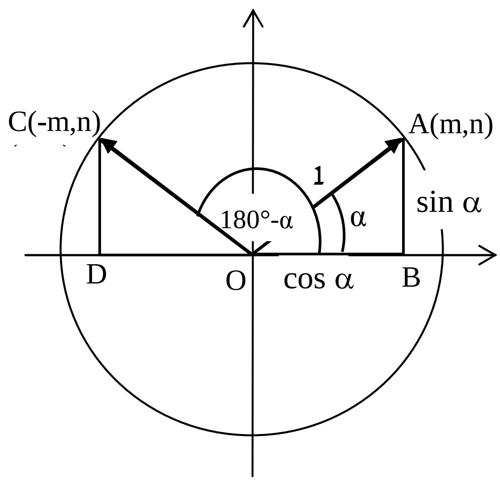
הקשר בין $tg\,\alpha$ ו- $tg(90°-\alpha)$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו את הזהות: $tg(90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$

הקשר בין $\sin\alpha$ ו- $\sin(180°-\alpha)$, בין $\cos\alpha$ ו- $\cos(180°-\alpha)$, בין $tg\,\alpha$ ו- $tg(180°-\alpha)$

נתבונן במעגל שאורך רדיוסו הוא 1.

המחוג OA יוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר x, והמחוג OC יוצר זווית $180° - \alpha$ עם הכיוון



החיובי של ציר x. כלומר: $\measuredangle AOB = \alpha$, $\measuredangle COD = 180° - \alpha$

נסמן את שיעורי הנקודה A (m,n)

לפי הנ"ל: $\sin\alpha = n$, $\cos\alpha = m$.

ΔAOB , ΔCOD הם ישרי זווית.

$\measuredangle COD = \alpha$ (הסבר!)

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (הוכח!) $\Leftarrow$ $AB = CD$, $OB = OD$

כיון שהנקודה C נמצאת ברביע שני, שיעוריה הם: $(-m,n)$.

כלומר:

$$\sin(180° - \alpha) = n = \sin\alpha \ , \ \cos(180° - \alpha) = -m = \cos\alpha$$

$$tg(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\alpha$$

עבור הזווית המשלימה ל-180° נקבל:

$\text{tg}\,(180°-\alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$	$\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$

דוגמאות:

$\sin 150° = \sin(180°-150°) = \sin 30° = 0.5$

$\cos 135° = -\cos(180°-135°) = -\cos 45° = -0.707$

$\text{tg}\,120° = -\text{tg}\,(180°-120°) = -\text{tg}\,60°$

תרגילים

1. מצאו את הערכים של: א. $\sin 135°$ ב. $\sin 120°$ ג. $\cos 120°$ ד. $\cos 150°$

2. בטאו בעזרת סינוס של הזווית החדה המתאימה: א. $\sin 158°$ ב. $\sin 110°$ ג. $\sin 91°$

3. בטאו בעזרת קוסינוס של הזווית החדה המתאימה: א. $\cos 125°$ ב. $\cos 162°$

4. חשבו (ללא מחשבון) את ערכי הביטויים הבאים:

   א. $\sin 120° \cdot \text{tg}30° + \cos 60° \cdot \text{tg}45°$

   ב. $5\text{tg}30° + \frac{8}{3}\sin 60° - \frac{2}{3}\cos 150°$

   ג. $\frac{1+\sin 60°}{\cos 60°} + \text{tg}120°$

5. א. נתון: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$. חשבו (בלי לחשב את α) את הערכים של: $\cos\alpha$; $\text{tg}\,\alpha$.

   ב. נתון: $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. חשבו (בלי לחשב את α) את הערכים של: $\sin\alpha$; $\text{tg}\,\alpha$.

   ג. נתון: $\text{tg}\,\alpha = \frac{60}{11}$. חשבו (בלי לחשב את α) את הערכים של: $\sin\alpha$; $\cos\alpha$;.

6. הוכיחו את הזהויות הבאות:

   א. $\sin(90°-\alpha)\cdot\text{tg}\alpha = \sin\alpha$ ב. $\sin^2\alpha + \sin^2(90°-\alpha) = 1$

ג. $tg\alpha \cdot tg(90° - \alpha) = 1$ ד. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

ה. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ ו. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

ז. $tg^2\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$ ח. $1 - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha$

ט. $\sin^2\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \cos^4\alpha$ י. $\dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = 0$

7. I. מצאו ערך אחד של הזווית x שמקיימים את המשוואה II. נסו למצוא לפחות ערך אחד נוסף.

א) $\sin 2x = 1$ ב) $\cos(90° - x) = 0$

ג) $\sin x = \cos(75° - 2x)$ ד) $\sin(x - 45°) = 0$

ה) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ו) $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ז) $\cos(5x - 30°) = -\dfrac{1}{2}$ ח) $\cos(60° - x) = \cos(2x - 30°)$

ט) $\sin(x - 90°) = 0.766$ י) $\sin 2x = \sin 50°$

יא) $4\sin x + 5 = 3$ יב) $2\cos^3 x - \cos x = 0$

יג) $\sin 2x - \sin(180° - 3x) = 0$ יד) $\sin^2 x = 0.25$

טו) $\cos\dfrac{x}{2} + \cos(x + 30°) = 0$ טז) $\cos^2 x - \sin x = 0.25$

יז) $\dfrac{1}{\sin 2x} - 2 = 0$ יח) $\dfrac{2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin x - 1} = 2$

יט) $tg3x + tg\,30° = 0$ כ) $tg(x + 20°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

כא) $tg(x - 90°) = 1$ כב) $tg(90° - x) + tg\,x = 2$