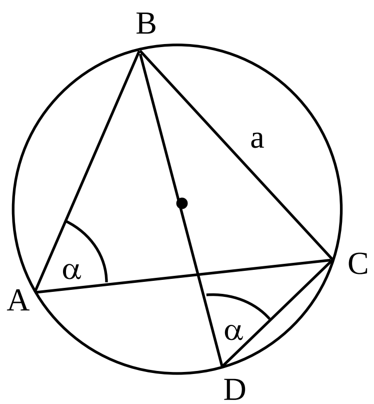
משפט הסינוסים

בכל משולש קיים יחס קבוע בין כל צלע לסינוס הזווית מולה, יחס זה שווה לפעמים רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

<u>הוכחה</u>:



ABC משולש שחסום במעגל שרדיוסו R.

נעביר קוטר BD.

$\sphericalangle ACD = 90^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על הקוטר)

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADC = \beta$ (זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת שוות)

ב- ΔBDC $\qquad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2R} = \sin\alpha$

באופן דומה, ניתן להוכיח: $\frac{c}{2R} = \sin\gamma$, $\frac{b}{2R} = \sin\beta$

ולכן: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

משתי ההוכחות יחד נובע: בכל משולש קיים יחס קבוע בין כל צלע לסינוס הזווית מולה, יחס זה שווה לפעמים רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

* במשולש קהה זווית, שני הגבהים עוברים מחוץ למשולש ונשתמש בהוכחה בעובדה: $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

* שימוש במשפט הסינוסים:

א. כאשר נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.

ב. כאשר נתונה צלע ושתי זוויות.

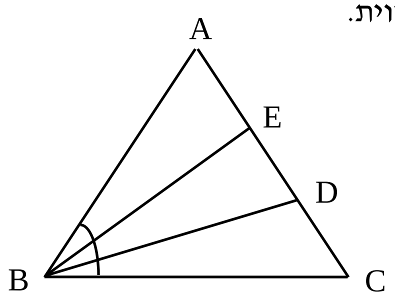
* יש לשים לב שהשימוש בנוסחה עם הקשר לרדיוס נכון רק כאשר המעגל חוסם את המשולש.

תרגילים

1. במשולש ABC נתון: $AB = 46.3$, $\sphericalangle C = 63^\circ$, $\sphericalangle B = 61^\circ$.
חשבו את אורכי הצלעות AC ו- BC.

2. שתי צלעות של משולש הן 5 ס"מ ו- 7 ס"מ הזווית מול הצלע של 5 ס"מ היא 34°.
   א. חשבו את שני הערכים האפשריים לזווית שמול הצלע השלישית.
   ב. חשבו את שני הערכים האפשריים לצלע השלישית.

3. שתי צלעות של משולש הן 8 ס"מ ו- 13 ס"מ רדיוס המעגל החוסם את המשולש הוא 7 ס"מ.
   א. חשבו את הצלע השלישית אם נתון שהמשולש חד זווית.
   ב. חשבו את הצלע השלישית אם נתון שהמשולש קהה זווית.



4. המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB=AC).
את הזווית B חילקו ל- 3 זוויות שוות.
השוק שווה ל- 18 ס"מ וזווית הראש 48°.
חשבו את BE ו- BD.

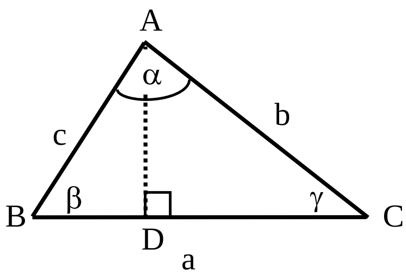
5. ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB=AC) BD הוא תיכון לשוק. נתון: $\sphericalangle BDA = 110^\circ$.
חשבו את זווית הראש של המשולש.

6. אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 18 ס"מ. שתים מזוויות המשולש הן בנות $\sphericalangle A = 67^\circ$, $\sphericalangle B = 62^\circ$. חשבו את צלעות המשולש.

7. במשולש שווה שוקיים אורך השוק הוא 10 ס"מ ואורך הבסיס הוא 12 ס"מ.
חשבו את האורך של חוצה זווית הבסיס.

משפט הקוסינוס

ריבוע צלע במשולש שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות
פחות פעמיים מכפלתן בקוסינוס הזווית הכלואה ביניהן.



$$\boxed{\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}}$$

הוכחה:

נוריד גובה AD לצלע a.

ב- ΔABD $\quad c^2 = AD^2 + BD^2$

ב- ΔADC $\quad b^2 = AD^2 + CD^2$

$BD = a - CD$

$c^2 = AD^2 + a^2 - 2a\,CD + CD^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CD$

$CD = b\cos\gamma$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

* במשולש קהה זווית הגובה מחוץ למשולש ומתקיים: $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$

תרגילים

1. אורכי הצלעות של משולש הם: 11 ס"מ, 15 ס"מ ו- 19 ס"מ.
חשבו את הזווית הגדולה במשולש.

2. שני תיכונים לשתי צלעות במשולש אורכם 12 ס"מ ו- 15 ס"מ והזוויות ביניהן שמול הצלע השלישית היא בת 135°. חשבו את צלעות המשולש.

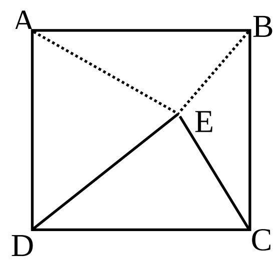
3. CD הוא תיכון לצלע AB במשולש ABC נתון: $AB = 7$, $BC = 6$, $CD = 4$
חשבו את הזווית ∢ABC ואורך הצלע AC.

4. צלע אחת במשולש גדולה ב- 1 ס"מ מצלע שניה וקטנה ב- 5 ס"מ מהצלע השלישית. אחת הזוויות במשולש היא בת $120°$. חשבו את צלעות המשולש.

5. E נקודה בתוך ריבוע ABCD שצלעו 12 ס"מ

נתון: $EC = 6$,$DE = 8$

חשבו את BE ואת AE.

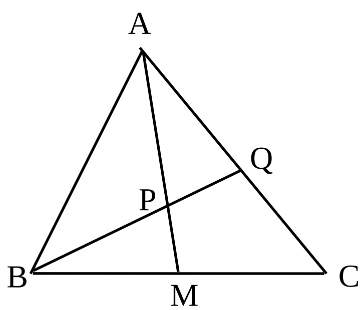


6. BQ ו- AM הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה P.

$AM = 42$ ס"מ, $BQ = 36$ ס"מ, $\measuredangle BPM = 53°$.

א. חשבו את היקף המרובע PMCQ.

ב. חשבו את שטח המשולש ABC.



7. מעגל חוסם מרובע שצלעותיו 4 ס"מ, 5 ס"מ, 6 ס"מ, 7 ס"מ (בסדר זה).
חשבו את זוויות המרובע, את שטחו ואת רדיוס המעגל החוסם אותו.

<u>**תרגילים נוספים**</u>

1. הוכיחו: שטח משולש הוא: $S = R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$, כאשר R הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש, ו- α , β , γ הן זוויות המשולש.

2. הוכיחו: שטח מרובע הוא: $S = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot \sin\alpha}{2}$ כאשר k_1 ו- k_2 הם אלכסוני המרובע, ו-α היא הזווית בין האלכסונים.

3. הוכיחו: שטח משולש הוא: $S = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha}$, כאשר a היא צלע במשולש, ו-α , β , γ הן זוויות המשולש.

4. הוכיחו: שטח משולש הוא: $S = r \cdot p$, כאשר p = מחצית היקף המשולש, r = רדיוס המעגל החסום במשולש.