פתרון אי-שיוויונות ממעלה שנייה באמצעות ציר איפוס

נקודת המוצא היא כי כל אי-שיוויון מקורו בשיוויון.

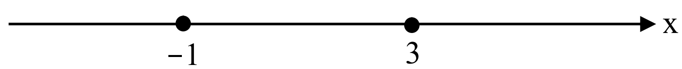
כך למשל אי השיוויון $x^2-2x-3\le 0$ מתחיל בנקודה בה אם שני האגפים היו שווים אז: $x^2-2x-3=0$.

היות והם אינם שווים, אנו מחפשים את התחום ששבו הביטוי שלילי או שווה ל- 0.

מכאן שנתחיל את הפתרון במציאת ערכי x המאפסים את השיוויון:

$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$\boxed{x=3}\ \boxed{x=-1}$$

נשרטט ציר מספרים ונסמן עליו את נקודות האיפוס:



נשים לב שקיבלנו שתי נקודות איפוס: $x=3$ ו- $x=-1$.

נתבונן בנקודת האיפוס $x=3$:

הביטוי $(x-3)$ משנה את סימנו במעבר דרך הערך $x=3$:

	$x<3$	$x=3$	$x>3$
$x=3$	−	0	+

לעומת זאת, הביטוי $(x+1)$ "אדיש" למעבר בערך $x=3$.

כלומר, רק הביטוי $(x=3)$ משפיע על שינוי סימן המכפלה במעבר דרך ערך האיפוס $x=3$.

נתבונן כעת בנקודת האיפוס $x=-1$:

הביטוי $(x+1)$ משנה את סימנו במעבר דרך הערך $x=-1$:

	$x<-1$	$x=-1$	$x>-1$
$x+1$	−	0	+

לעומת זאת, הביטוי $(x=3)$ "אדיש" למעבר בערך $x=-1$.

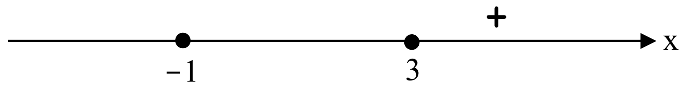
כלומר, רק הביטוי $x+1$ משפיע על שינוי סימן המכפלה במעבר דרך ערך האיפוס $x=-1$.

היות והשיוויון בנוי ממכפלת שני איברים, אם אחד האיברים משנה את סימנו, המכפלה כולה משנה את סימנה.

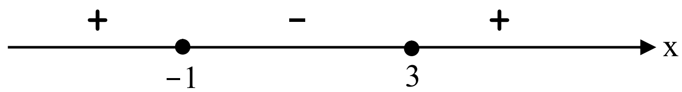
<u>מכאן, שמספיק שנדע את סימן המכפלה בתחום מסויים ומשם הסימנים יתחלפו לסרוגין.</u>

נבחר ערך ל- x בתחום $x > 3$, למשל $x = 4$. סימן המכפלה יהיה חיובי:

$$\underset{+}{\underset{\downarrow}{(x-3)}}\underset{+}{\underset{\downarrow}{(x+1)}} > 0$$



ולכן מכאן הסימנים יתחלפו לסירוגין:



היות ונשאלנו באיזה תחום ערכי המכפלה קטנים או שווים ל-0 , התשובה היא: $\boxed{-1 \le x \le 3}$.

<u>דוגמה נוספת:</u>

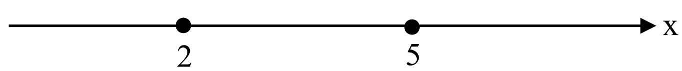
יש לפתור את אי-השיוויון הבא: $-x^2 + 7x - 10 \le 0$.

תחילה נחפש את נקודות האיפוס:

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

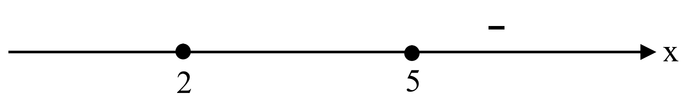
$$\underset{\boxed{x=2}}{\underset{\Downarrow}{(x-2)}}\underset{\boxed{x=5}}{\underset{\Downarrow}{(5-x)}} = 0$$

נשרטט את ציר האיפוס:

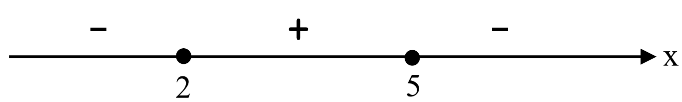


נחשב את סימן המכפלה בתחום $x > 5$, נבחר למשל את הערך $x = 6$, סימן המכפלה הוא שלילי:

$$\underset{+}{\underset{\downarrow}{(x-2)}}\underset{-}{\underset{\downarrow}{(5-x)}} < 0$$



ומכאן, סימני המכפלה יתחלפו לסירוגין:



היות ונשאלנו באיזה תחום ערכי המכפלה קטנים או שווים ל- 0 , התשובה היא: $\boxed{x \ge 5}$ או $\boxed{x \le 2}$.

פתרון אי-שיוויונות ממעלה גבוהה מ-2

ניישם את שיטת ציר האיפוס לפתרון אי- שיוויונות בחזקות גבוהות.

העיקרון: <u>כל אחד מהגורמים **הליניאריים השונים** שבמכפלה, מחליף את סימן המכפלה **פעם אחת**, בנקודת האיפוס שלו.</u>

נשתמש באותם שלבים:

- מציאת נקודות האיפוס
- שרטוט ציר האיפוס
- חישוב סימן המכפלה באחד התחומים
- קביעת סימני המכפלה בתחומים האחרים
- פתרון אי- השיוויון

<u>דוגמה 1</u>

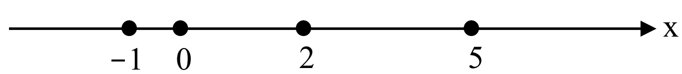
יש לפתור את אי- השיוויון הבא: $x(x+1)(x-2)(5-x)<0$

נפעל על-פי השלבים שלמדנו.

נמצא את נקודות האיפוס:

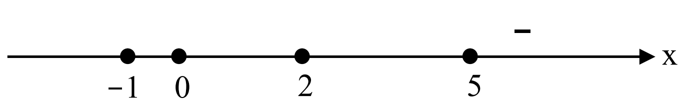
$$\begin{array}{cccc} x & (x+1) & (x-2) & (5-x)=0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boxed{x=0} & \boxed{x=-1} & \boxed{x=2} & \boxed{x=5} \end{array}$$

נשרטט את ציר האיפוס:

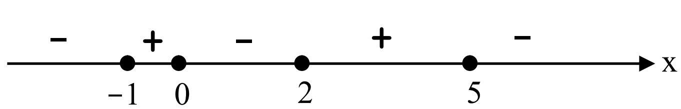


נחשב את סימן המכפלה בתחום $x>5$, נבחר למשל את הערך $x=7$. ערך המכפלה שלילי:

$$\begin{array}{cccc} x & (x+1) & (x-2) & (5-x)<0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ + & + & + & - \end{array}$$



ומכאן הסימנים מתחלפים לסירוגין:



כל שנותר לנו הוא לפתור את אי-השיוויון. התבקשנו למצוא מתי ערכי המכפלה שליליים, ולכן התשובה היא:

$\boxed{x>5}$ או $\boxed{0<x<2}$ או $\boxed{x<-1}$.

<u>הערה חשובה:</u> חשוב להבין כי אין מגבלה על התחום בו אנו רוצים לחשב את סימן המכפלה, התוצאה תהיה זהה מבחינת ציר האיפוס.

<u>דוגמה 2</u>

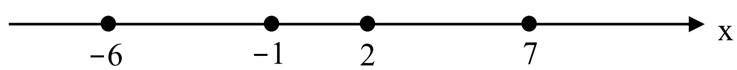
יש לפתור את אי-השיוויון הבא: $\left(x^2-6x-7\right)\left(x^2+4x-12\right)>0$.

תחילה נפרק לגורמים הפשוטים ביותר כדי להקל על בניית ציר האיפוס:

$$(x-7)(x+1)(x-2)(x+6)>0$$

נמצא את נקודות האיפוס ונשרטט אותן על ציר האיפוס:

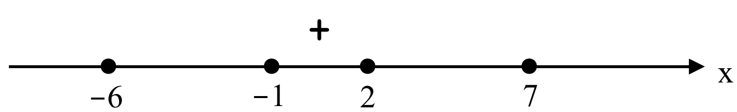
$$\begin{array}{cccc} (x-7) & (x+1) & (x-2) & (x+6)=0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boxed{x=7} & \boxed{x=-1} & \boxed{x=2} & \boxed{x=-6} \end{array}$$



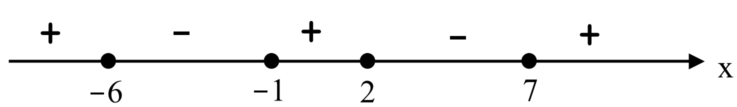
נחשב את סימן המכפלה באחד התחומים, למשל בתחום $-1<x<2$

נבחר את הערך: $x=0$. נקבל כי סימן המכפלה חיובי:

$$\begin{array}{cccc} (x-7) & (x+1) & (x-2) & (x+6)>0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ - & + & - & + \end{array}$$



מכאן לסירוגין נקבע את הסימנים בתחומים האחרים:



התשובה: היות והתבקשנו למצוא מתי ערך המכפלה חיובי, התשובה היא: $\boxed{x>7}$ או $\boxed{-1<x<2}$ או $\boxed{x<-6}$.

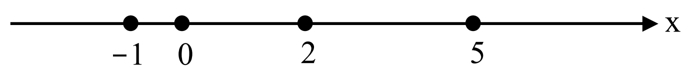
<u>הרחבות לפתרון באמצעות ציר איפוס</u>

נתבונן בתרגיל מסעיף קודם: $x(x+1)(x-2)(5-x)<0$

נשנה את התרגיל באופן הבא: $x^2(x+1)^3(x-2)^6(5-x)^5<0$

הוספת החזקות אינה משנה את נקודות האיפוס על הציר:

$$\underset{\boxed{x=0}}{\underset{\downarrow}{x^2}}\;\underset{\boxed{x=-1}}{\underset{\downarrow}{(x+1)^3}}\;\underset{\boxed{x=2}}{\underset{\downarrow}{(x-2)^6}}\;\underset{\boxed{x=5}}{\underset{\downarrow}{(5-x)^5}}=0$$



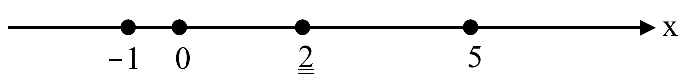
אך משהו מהותי ביותר משתנה! נתבונן למשל בנקודת האיפוס $x=2$:

נקודה זו נוצרה מאיבר המכפלה $(x-2)^6$, איבר זה אמור להחליף את סימנו במעבר בערך $x=2$ היות והוא זה שקובע את נקודת האיפוס, אך בעקבות החזקה הזוגית נקבל:

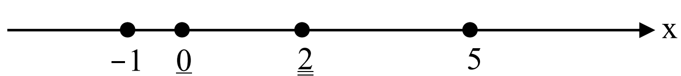
$x>2$	$x=2$	$x<2$	
+	+	+	$(x-2)^6$

כלומר, הגורם שבדקנו אינו גורם לשינוי הסימן במעבר בנקודת ה-0 שלו.

קיבלנו נקודת איפוס שאינה משנה את סימנה במעבר בה, נקרא לנקודה כזו "נקודת בלוף" ונסמנה בציר האיפוס:

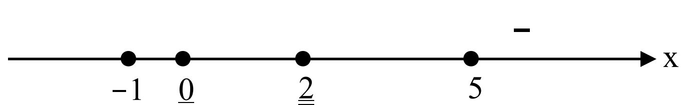


באופן דומה גם נקודת האיפוס $x=0$ היא "נקודת בלוף" בעקבות החזקה הזוגית. שאר נקודות האיפוס מחליפות סימן היות וחזקתן אי-זוגית. נקבל את ציר האיפוס הבא:



ומכאן נמשיך בתהליך הרגיל: נחשב את סימן המכפלה בתחום מסויים, למשל בתחום $x>5$ נבחר את הערך $x=6$, נקבל כי סימן המכפלה שלילי:

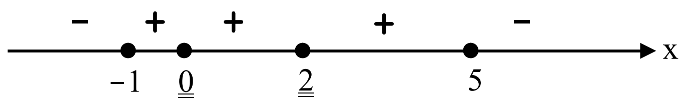
$$\underset{+}{\underset{\downarrow}{x^2}}\;\underset{+}{\underset{\downarrow}{(x+1)^3}}\;\underset{+}{\underset{\downarrow}{(x-2)^6}}\;\underset{-}{\underset{\downarrow}{(5-x)^5}}<0$$



נקודת איפוס רגילה: תחליף סימן

נקודת איפוס "בלוף": לא תחליף סימן

מתקבל ציר האיפוס הבא:



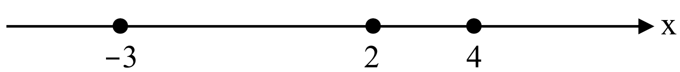
נותר לכתוב את הפתרון: $\boxed{x > 5}$ או $\boxed{x < -1}$.

<u>דוגמה נוספת</u>

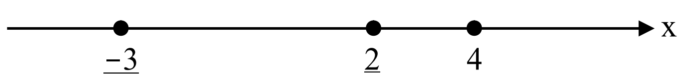
פתרו את אי-השיוויון הבא: $(x-4)^3 (x+3)^2 (x-2)^4 \ge 0$

נפתור על-פי השלבים שלמדנו: נחשב נקודות איפוס ונסמנן על ציר המספרים:

$$\underset{\boxed{x=4}}{\underset{\downarrow}{(x-4)^3}}\;\underset{\boxed{x=-3}}{\underset{\downarrow}{(x+3)^2}}\;\underset{\boxed{x=2}}{\underset{\downarrow}{(x-2)^4}} \ge 0$$



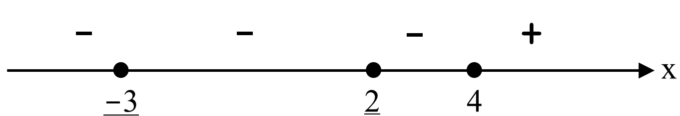
נסמן את "נקודות הבלוף" $x=-3$ ו- $x=2$:



נחשב את סימן המכפלה באחד התחומים, נניח בתחום $x<-3$ נבחר את הערך $x=-5$

$$\underset{-}{\underset{\downarrow}{(x-4)^3}}\;\underset{+}{\underset{\downarrow}{(x+3)^2}}\;\underset{+}{\underset{\downarrow}{(x-2)^4}} < 0$$

נסמן את סימני המכפלה בציר האיפוס, נזכור כי בנקודת "בלוף" אין החלפת סימן:



כל שנותר הוא לכתוב את פתרון אי-השיוויון: $x \ge 4$ או $\boxed{x=2}$ או $\boxed{x=-3}$.

פתרון אי-שיוויונות עם גורמים שאין להם נקודות איפוס

<u>דוגמה 1</u>

פתור את אי-השיוויון הבא: $\left(x^2+5\right)\left(x^2+7x-30\right)^2\left(x^2-25\right)^3 \le 0$

נפרק לגורמים הפשוטים ביותר כדי להקל על בניית ציר האיפוס:

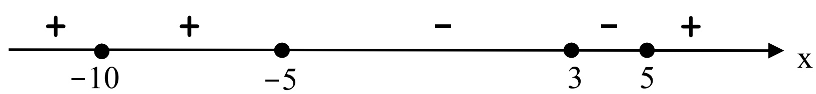
$$\left(x^2+5\right)\left(x-3\right)^2\left(x+10\right)^2\left(x-5\right)^3\left(x+5\right)^3 \le 0$$

נחשב את נקודות האיפוס:

$$\left(x^2+5\right)\underset{\boxed{x=3}}{\underset{\downarrow}{\left(x-3\right)^2}}\underset{\boxed{x=-10}}{\underset{\downarrow}{\left(x+10\right)^2}}\underset{\boxed{x=5}}{\underset{\downarrow}{\left(x-5\right)^3}}\underset{\boxed{x=-5}}{\underset{\downarrow}{\left(x+5\right)^3}} \le 0$$

לסוגריים הראשונים אין נקודת איפוס, $\left(x^2+5\right)$ חיובי לכל ערך ממשי של x.

מכאן שנתחשב בסימנו אך הוא לא יופיע בציר האיפוס, פתרון אי-השיוויון יהיה:



$\boxed{-5 \le x \le 5}$ או $\boxed{x=-10}$.

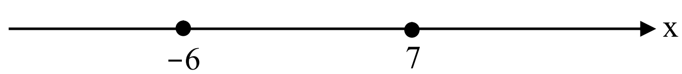
<u>דוגמה 2</u>

פתור את אי-השיוויון הבא: $\left(x-7\right)^3\left(x+6\right)^2\left(-x^2+x-5\right)^n \ge 0$

נפתור:

נקודות איפוס: $\boxed{x=7}$ ו- $\boxed{x=-6}$

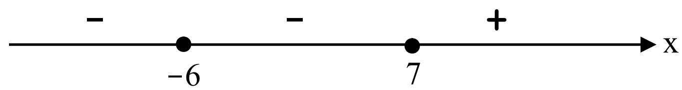
ציר איפוס:



היות והביטוי $\left(-x^2+x-5\right)$ אינו מתאפס והוא שלילי לכל ערך ממשי של x, עלינו להפריד לשני מקרים:

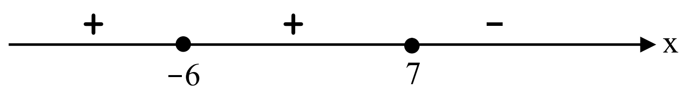
n זוגי	n אי-זוגי	
+	–	$\left(-x^2+x-5\right)^n$

אם n זוגי, סימני התחומים יהיו:



והפתרון הוא: $\boxed{x \ge 7}$ או $\boxed{x = -6}$.

אם n אי-זוגי, סימני התחומים יהיו:



והפתרון הוא: $\boxed{x \le 7}$.

<u>תרגילים</u>

פתור את אי השוויונות הבאים:

1. $(7-2x)(x+4) \le 0$
2. $x(x+1) > 2x^2 - 6$
3. $-x^2 + 7x - 10 \ge 0$
4. $(x-5)^2 > (2x+1)(5-x)$
5. $x^4 \ge 16$
6. $(x^2+3x-10)(x^2-4x-21) > 0$
7. $(x-5)(2-x)^3(x+10)^4(x+3)^3(x+1) \le 0$
8. $(x^3-x)^3(x^2-1)(x+2)^5 < 0$