

חוברת העשרה מתמטיקה מופת

בסיסי ספירה	עמ' 2
פלינדרום	עמ' 5
חשבון מודולרי	עמ' 6
פעילות בנושא צורות שוות שטח	עמ' 13
סימני התחלקות	עמ' 17
משפט פיק	עמ' 23
עקרון שובך היונים	עמ' 32
משוואות דיופנטיות	עמ' 37
משוואות מיוחדות	עמ' 39
פעילות בנושא ריצופים	עמ' 43
בעיות בניה באמצעות מחוגה וסרגל	עמ' 52
חלוקה לשברים חלקיים	עמ' 56

בסיסי ספירה

בשיטת הפוזיציה (מיקום) של רישום מספרים, ערכה של ספרה תלוי במקומה במספר. שיטה זו היתה ידועה להודים כבר במאה ה-6, אך השתרשה בחיי יום יום רק בסוף המאה ה-16. הברהמינים – כוהני הדת ההודיים היו הראשונים שפיתחו את השיטה ואת כללי החשבון שלה. הערבים אשר קיימו קשרי מסחר ותרבות עם ההודים למדו מהם את שיטת הפוזיציה, והעבירו אותה לספרד ולשאר ארצות אירופה.

בשיטה העשרונית אפשר לרשום את כל המספרים בעזרת 10 ספרות: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. משערים שמקורו של בסיס זה במספר אצבעות הידיים ששימשו כדי להציג מספרים ולחשב אותם. בבסיס העשרוני, אנו קוראים לספרה הראשונה משמאל לנקודה העשרונית ספרת האחדות, לשנייה ספרת העשרות, לשלישית ספרת המאות וכו'. בדומה, לספרה הראשונה מימין לנקודה העשרונית אנו קוראים ספרת העשיריות, לשנייה ספרת המאות וכו'. בשיטה זו אפשר להשתמש עבור בסיסים שונים, ולא רק עשר, בתנאי שערך הבסיס שלם וגדול מ-1. מספר הספרות הקיימות בבסיס מסוים n , הוא כערכו של הבסיס n . הספרות הן: 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, כלומר מ-0 עד אחד לפני ערכו של הבסיס. לדוגמא: בבסיס ארבע הספרות הן: 0, 1, 2, 3.

בסיס בינארי היא שיטת ספירה לפי בסיס שתיים. היא פותחה במקור על ידי גוטפריד וילהלם לייבניץ במאה ה-17. בבסיס שתיים (בינארי) יש רק שתי ספרות: 0, 1 כך שכל המספרים הבינאריים מורכבים מהספרות האלה בלבד. השיטה משמשת כיום בעיקר בתחום מדעי המחשב, מפני שהאבחנה בין אין מתח (0) לבין יש מתח (1) קלה מאד, לעומת דרישה לאבחנה בין מתחים שונים הגדולים מ-0.

ספירה לפי בסיס זה: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, ..., 10000, 1111, 1110

מעבר מבסיס בינארי לבסיס עשר

בבסיס עשר הזזה שמאלה של ספרה במקום אחד, מגדילה את הערך המיוצג על ידיה פי 10.

למשל המספר: 5359814 עשר

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1	
5	3	5	9	8	1	4	$= 5 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 1$

באופן כללי, הזזה שמאלה של ספרה במקום אחד, מגדילה את הערך המיוצג על ידיה פי ערך הבסיס (n).

ערך הספרה	1	n	n^2	n^3	n^4	n^5
הספרה						

2^5	2^4	2^3	2^2	2	1	
1	1	1	1	0	1	$=1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 53$

דוגמא

עשר = ? 110101_2

עשר $53 = 110101_2$ וזוהי למעשה הפיכה לשיטה העשרונית.

תרגיל

המספרים הבאים נתונים בבסיס בינארי. חשבו את ערכיהם בבסיס עשרוני.

- א. בינארי 11 ב. בינארי 1011 ג. בינארי 110000 ד. בינארי 10101010
ה. בינארי 0.1 ו. בינארי 10.11 ז. בינארי 1.0101 ח. בינארי 1101.011

פעולות החיבור והכפל בבסיס בינארי

חיבור

לוח החיבור בבסיס בינארי

+	0	1
0	0	1
1	1	10

כפל

לוח הכפל בבסיס בינארי

.	0	1
0	0	0
1	0	1

דוגמא

$$\begin{array}{r}
 101011 \\
 + 110111 \\
 \hline
 1100010
 \end{array}$$

תרגילים

1. מהם המאפיינים של טבלאות החיבור והכפל של בסיס בינארי, ואילו תכונות של פעולת החיבור והכפל באות לידי ביטוי בכך?

2. בצעו את פעולות החיבור:

א. בינארי $(11+11)$ ב. בינרי $(10+101)$ ג. בינארי $(10001+11)$ ד. בינארי $(110+10+101)$

3. בצעו את פעולות הכפל: א. בינארי $(10 \cdot 10)$ ב. בינארי $(10 \cdot 1011)$ ג. בינארי $(111 \cdot 111)$

מעבר מבסיס עשרוני לבסיס בינארי

דוגמא

בינארי $157 = ?$

מחשבים את החזקה הגבוהה ביותר של 2 שאיננה גדולה מהמספר הנתון. $2^7 \leq 157$.

במקרה זה $2^7 = 128 \leq 157$.

מחלקים ומקבלים: $157 : 128 = 1(29)$, כלומר המנה $= 1$, השארית $= 29$, $157 = 1 \cdot 128 + 29$

שוב מחלקים את השארית בחזקה הגבוהה ביותר האפשרית, במקרה זה ב- $2^4 = 16 \leq 29$,

$29 : 16 = 1(13)$, ולכן $29 = 1 \cdot 16 + 13$.

חוזרים על התהליך עד לסיום. $2^3 = 8 \leq 13$, מחלקים: $13 : 8 = 1(5)$, ולכן $13 = 1 \cdot 8 + 5$

$2^2 = 4 \leq 5$, $5 : 4 = 1(1)$, ולכן $5 = 1 \cdot 4 + 1$.

בינארי $157 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1 = 1001101$

הנקודה ה"עשרונית"

הספרות הרשומות מצדה הימני של הנקודה ה"עשרונית" מייצגות ערכים קטנים משלם.

בבסיס עשרוני משמעות שבר היא: $0.2748_{\text{עשר}} = 2 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{10^2} + 4 \cdot \frac{1}{10^3} + 8 \cdot \frac{1}{10^4}$

0.10101 בבסיס בינארי: $1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3} + 0 \cdot \frac{1}{2^4} + 1 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1}{2^5} = \frac{21}{32}$

תרגיל: רשמו את המספרים העשרוניים הנתונים בבסיס בינארי: (i) 5 (ii) 10 (iii) 15 (iv) 101

(v) 213 (vi) 0.25 (vii)* 5.75 (viii)* $1\frac{17}{32}$

פלינדרום

מקור המילה פלינדרום הוא מיוונית עתיקה, ופירושה ריצה הלוך ושוב באותו מסלול.

מספר שנכתב מימין לשמאל ומשמאל לימין באותו סדר נקרא מספר פלינדרומי.

דוגמאות: 621126, 40004, 6452546, וכו'...

יש גם מילים פלינדרומיות: אבא, אמא, דוד, שמש, AVIVA, MADAM, RADAR וכו'.

אם נחבר למספר את המספר הכתוב בסדר ספרות הפוך, במקרים מסויימים נקבל מספר פלינדרומי.

למשל: $35 + 53 = 88$, $425 + 524 = 949$, $3416 + 6143 = 9559$, וכו'.

מהם התנאים שצריכים להתקיים כדי שהסכום של מספר והמספר הכתוב בסדר ספרות הפוך יהיה פלינדרום, כאשר המספר הוא: דו ספרתי, תלת ספרתי, ארבע ספרתי? נסחו כלל עבור מספר ספרות זוגי ועבור מספר ספרות איזוגי.

אם נחבר למספר דו ספרתי את המספר הכתוב בסדר ספרות הפוך ולסכום נחבר מספר הכתוב בסדר הפוך של הסכום וכן הלאה..., לאחר מספר סופי של צעדים נקבל מספר פלינדרומי.

דוגמאות:

$\begin{array}{r} 78 \\ + 87 \\ \hline 165 \\ + 561 \\ \hline 726 \\ + 627 \\ \hline 1353 \\ + 3531 \\ \hline 4884 \end{array}$	$\begin{array}{r} 69 \\ + 96 \\ \hline 165 \\ + 561 \\ \hline 726 \\ + 627 \\ \hline 1353 \\ + 3531 \\ \hline 4884 \end{array}$	$\begin{array}{r} 86 \\ + 68 \\ \hline 154 \\ + 451 \\ \hline 605 \\ + 506 \\ \hline 1111 \end{array}$	$\begin{array}{r} 73 \\ + 37 \\ \hline 110 \\ + 011 \\ \hline 121 \end{array}$
---	---	--	--

* מהמספר 98 נקבל מספר פלינדרומי לאחר 14 צעדים... בדקו!

שימו לב: כל מספר פלינדרומי בעל 4 ספרות מתחלק ב-11: $7227 = 11 \cdot 657$, $9009 = 11 \cdot 819$, וכו'...

הוכיחו תכונה זו עבור מספר פלינדרומי 4 ספרתי. נסו לחשב כמה מספרים בני ארבע ספרות פלינדרומים קיימים. בדקו האם התכונה הנ"ל קיימת עבור מספר שונה של ספרות.

מכפלה פלינדרומית דו ספרתית:

$$36 \times 21 = 12 \times 63 \quad ; \quad 84 \times 12 = 21 \times 48 \quad ; \quad 64 \times 23 = 32 \times 46$$

מצאו דוגמאות נוספות. מה התכונה המשותפת לכל המכפלות הפלינדרומיות של מספר דו ספרתי בדו ספרתי? הוכיחו תכונה זו.

חשבון מודולרי

חשבון מודולרי בחיי יום יום מתייחס לתופעות מחזוריות, שהנפוץ בהן הוא הזמן.

דוגמאות:

1. היום יום שני. איזה יום בשבוע יהיה בעוד 25 יום?
לפי החישוב שלנו התוצאה היא 6 (כלומר יום שישי).
נרשום את התרגיל : $2 \oplus 25 \equiv 6$ (כדי להבחין בין חשבון זה וחשבון רגיל).
2. היום יום רביעי. איזה יום בשבוע היה לפני 6 ימים?
לפי החישוב שלנו התוצאה היא 5 (כלומר יום חמישי).
נרשום את התרגיל : $4 \ominus 6 \equiv 5$.
3. השעה כעת 6. מה יורה השעון בעוד 17 שעות?
התשובה היא 11. התרגיל : $6 \oplus 17 \equiv 11$
4. השעה כעת 2. מה הראה השעון לפני 9 שעות?
התשובה היא 5. התרגיל : $2 \ominus 9 \equiv 5$.

בדוגמאות 1 ו-2 קבענו את התוצאה ע"י חישוב השארית בחילוק ב-7.
לפי חשבון זה המספר 9 מזוהה עם 2, 25 עם 4, 35 עם 0, (-6) עם 1, וכו'.

בדוגמאות 3 ו-4 קבענו את התוצאה ע"י חישוב השארית בחילוק ב-12.
לפי חשבון זה המספר 17 מזוהה עם 5, 36 עם 0, (-9) עם 3, וכו'.

בחשבון מודולרי מכירים רק קבוצה סופית של מספרים, וכל תוצאה של פעולה מתמטית מיוצגת ע"י איבר בקבוצה זו.

בקבוצת ימי השבוע, או בקבוצת השאריות בחלוקה ב-7, יש 7 איברים: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (יום שבת יוגדר 0, יום ראשון 1 וכו').

בדוגמא 1 החישוב הוא: $2 + 25 = 27$. המספר 27 לא נמצא בקבוצת השאריות. המספר המתאים לו בקבוצת השאריות הוא 6.

כאשר מחלקים את a ב-n ומקבלים שארית b, (a ו-b שלמים ו-n טבעי, $n \neq 1$), נרשום:

$a \equiv b \pmod{n}$, כלומר: $|a - b| = kn$ (k מספר שלם).

דוגמאות

א. $28 \equiv 3 \pmod{5}$ כי $28 - 3 = 25$, וההפרש 25 מתחלק ב-5, או נוכל להראות ש-28 נותן אותה שארית 3 בחלוקה ב-5.

ב. $47 \equiv 12 \pmod{7}$ כי $47 - 12 = 35$, וההפרש 35 מתחלק ב-7, או נוכל להראות ש-47 ו-12 נותנים אותה שארית 5 בחלוקה ב-7.

ג. $-5 \equiv 13 \pmod{9}$ כי $-5 - 13 = -18$, וההפרש -18 מתחלק ב-9.

☀ מהנ"ל נובע השוויון: $a + kn \equiv a \pmod{n}$

הגדרה: $\mathbb{Z}_n$ נקראת המערכת השלמה של השאריות לפי בסיס n (או מודולו n), והיא קבוצת השאריות בחילוק ב- n .

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

בחשבון שאריות בחילוק ב-5, ישנם 5 מספרים. אנו רושמים קבוצה זו: $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

קרל פרידריך גאוס, מגדולי המתמטיקאים שבכל הדורות, פיתח את השיטה המתמטית של קונגרואנציות (שקילויות)

אריתמטיות שפותחה ופורסמה על ידו בספר ב-1801 (גאוס היה אז בן 24). לפי שיטה זאת, אנו אומרים ששני

מספרים שלמים הם שקולים מודולו מספר שלם n שונה מאפס, כאשר ההפרש שלהם מתחלק במספר n . במילים

אחרות, שני מספרים שלמים הם שקולים, מודולו n , אם הם נותנים אותה שארית כאשר מחלקים כל אחד מהם ב- n .

גאוס הכניס גם את הרישום שמשמשים בו עד היום: $a \equiv b \pmod{n}$

כאמור, משמעות עובדה זו, היא ש- a ו- b נותנים אותה שארית בחלוקה ב- n , או ההפרש $a - b$ מתחלק ב- n ללא שארית.

הייחוד בתורה זאת הוא בכך שהיא מקיימת הרבה חוקים של האריתמטיקה והאלגברה.

(I) אם $a \equiv b \pmod{n}$ וגם $c \equiv d \pmod{n}$, אז: $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{n}$

דוגמא: $18 \equiv 3 \pmod{5}$, $6 \equiv 1 \pmod{5}$, אז: $18 + 6 \equiv (3 + 1) \pmod{5}$

הוכחה: $(a + c) - (b + d) = (k + p)n \Leftarrow c - d = pn$, $a - b = kn \Leftarrow c \equiv d \pmod{n}$, $a \equiv b \pmod{n}$

ולפי ההגדרה הוכחנו.

(II) אם $a \equiv b \pmod{n}$ וגם $c \equiv d \pmod{n}$, אז: $(a - c) \equiv (b - d) \pmod{n}$

דוגמא: $18 \equiv 3 \pmod{5}$, $6 \equiv 1 \pmod{5}$, אז: $18 - 6 \equiv (3 - 1) \pmod{5}$

הוכחה: כמו בקודם: $(a - c) - (b - d) = (k - p)n$ ולפי ההגדרה הוכחנו.

(III) אם $a \equiv b \pmod{n}$ וגם $c \equiv d \pmod{n}$, אז: $(a+c) \equiv (b+d) \pmod{n}$

דוגמא: $10 \equiv 3 \pmod{7}$, $16 \equiv 2 \pmod{7}$, אז: $16 \cdot 10 \equiv 2 \cdot 3 \pmod{7}$

הוכחה: $a = b + kn \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$, $c = d + pn \Leftrightarrow c \equiv d \pmod{n}$.

כלל זה הוא למעשה הרחבה של (III), וניתן להוכיח אותו בהסתמך עליו. בעזרת כלל זה נוכל לדעת מהי הספרה האחרונה בחזקה.

(IV) אם $a \equiv b \pmod{n}$ אז: $a^t \equiv b^t \pmod{n}$

כלל זה הוא למעשה הרחבה של (III), וניתן להוכיח אותו בהסתמך עליו. בעזרת כלל זה נוכל לדעת מהי הספרה האחרונה בחזקה.

דוגמא: מהי השארית של המספר 4^{14} בחלוקה ב-7?

פתרון אפשרי: $4^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4^{14} = (4^3)^4 \cdot 4^2 \equiv (1^4 \cdot 16) \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$

תרגילים

1. קבעו אילו מן הטענות הבאות נכונות ואילו לא, ונמקו:

- א. $32 \equiv 0 \pmod{11}$ ב. $-5 \equiv 3 \pmod{8}$ ג. $48 \equiv 3 \pmod{9}$
 ד. $101 \equiv -1 \pmod{10}$ ה. $72 \equiv -12 \pmod{28}$ ו. $-96 \equiv 1 \pmod{5}$

2. מצאו את הפתרון הטבעי הקטן ביותר של כל אחת המשוואות הבאות, ובדקו את הפתרון:

- א. $x + 2 \equiv 15 \pmod{9}$ ב. $25x \equiv 10 \pmod{5}$ ג. $21x \equiv 2 \pmod{5}$
 ד. $2x + 5 \equiv 1 \pmod{7}$ ה. $4(x + 4) \equiv 2 \pmod{6}$ ו. $2x - 5 \equiv 6 \pmod{7}$
 ז. $2 + x \equiv 2x + 1 \pmod{3}$ ח. $2(x - 3) \equiv 0 \pmod{5}$

3. א. מהי השארית של המספר 6^{32} בחלוקה ב-7? ב. מהי השארית של המספר 2^{26} בחלוקה ב-5?

4. $2^{25} + 4 \equiv ? \pmod{9}$

5. א. באיזו ספרה מסתיים הסכום: $3^5 + 3^{20}$? ב. באיזו ספרה מסתיים הסכום: $6^{12} + 14^8 + 21^4$?

תשובות: 2. א. 4 ב. 1 ג. 2 ד. 5 ה. 1 ו. 2 ז. 1 ח. 3

3. א. 1 ב. 4 ג. 4 ד. 6 ה. 5 ו. 4 ז. 3 ח. 3

פעולת החיבור בחשבון מודולרי

נבנה את לוח החיבור של השאריות, לאחר החלוקה ב-5.

קבוצת השאריות תכיל 5 איברים: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

נסמן את פעולת הכפל הזאת $\oplus$ כדי להבדילה מהחיבור הרגיל.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

תרגיל

- בנו את לוחות החיבור של השאריות מודולו 4, מודולו 7.
- רשמו את התכונות והחוקיות המשותפות לכל לוחות החיבור. מהו האיבר הניטרלי של פעולת החיבור הזאת?

מספרים נגדיים

בחיבור רגיל, שני מספרים נגדיים הם שני מספרים שסכומם 0.
 גם בחשבון שאריות שני מספרים נגדיים הם שני מספרים שסכומם שקול ל-0.
 כלומר, בחיבור המודולרי האיבר הנגדי הוא האיבר המשלים ל-0 בקבוצת השאריות.
 $2 \oplus 3 \equiv 0 \pmod{5}$. לכן 2 ו-3 הם מספרים נגדיים.

תרגיל

- היעזרו בלוחות החיבור וענו:
- האם לכל איבר בקבוצת השאריות יש מספר נגדי?
 - רשמו את כל זוגות המספרים הנגדיים זה לזה בקבוצת השאריות מודולו 5, 4, 7.

פעולת החיסור בחשבון מודולרי

פעולת החיסור היא חיבור המספר הנגדי. בחשבון מודולרי המספר הנגדי הוא המספר המשלים ל-0 בחלוקת השאריות. לכן, כשאנו מחסרים בחשבון מודולרי, נחבר את האיבר המשלים ל-0 את המספר אותו צריך לחסר.

דוגמאות:

$$0 - 1 \equiv 0 \oplus 4 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$4 - 3 \equiv 4 \oplus 2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$3 - 1 \equiv 3 \oplus 3 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$5 - 2 \equiv 5 \oplus 5 \equiv 3 \pmod{7}$$

פעולת החיבור המודולרי ופעולת החיסור המודולרי הן שתי פעולות הפוכות.
 לכן אפשר כמובן לבדוק ואף לבצע את פעולת החיסור בעזרת לוח החיבור:
 $4 - 3 \equiv ? \pmod{5}$ או: $? \oplus 3 \equiv 4 \pmod{5}$ ולפי הטבלה התשובה היא 1.

פעולת הכפל בחשבון מודולרי

נבנה את לוח הכפל של השאריות לאחר החלוקה ב-5.
 נסמן את פעולת החיבור הזאת $\odot$ כדי להבדילה מהחיבור הרגיל.

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

תרגיל

- בנו את לוחות הכפל של השאריות מודולו 4, מודולו 7.
- רשמו את התכונות והחוקיות המשותפות לכל לוחות הכפל (התייחסו גם לסימטריה).
 מהו האיבר הניטרלי של פעולת הכפל הזאת?

נבנה את לוח הכפל של השאריות לאחר החלוקה ב-6.
 בקבוצת זו 6 איברים: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\odot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

שאלה:

בכפל רגיל, מכפלת שני מספרים שווה ל-0, אם אחד מהם שווה ל-0.
האם כלל זה מתקיים גם בכפל מודולרי?
מהם ההבדלים העיקריים בין טבלת הכפל מודולו 5 לבין טבלת הכפל מודולו 6?
ממה נובע הבדל זה בין הטבלאות?

הגדרה:

שני מספרים שונים מ-0 מודולו n שמכפלתם שווה ל-0, נקראים מחלקים של אפס.
כלל: בכפל מודולו n , אם n הוא ראשוני, אין מחלקי אפס, אם n הוא לא ראשוני - תמיד יש מחלקי אפס.

פעולת החילוק בחשבון מודולרי

פעולת החילוק היא כפל במספר ההופכי. שני מספרים הופכיים- מכפלתם שווה ל-1.
בחשבון רגיל, לכל מספר פרט ל-0 יש מספר הופכי.
בחשבון מודולרי אין הדבר נכון תמיד.

תרגיל:

- רשמו את כל זוגות המספרים ההופכיים זה לזה בקבוצות השאריות מודולו 4, 5, 6, 7, 10, 11.
- נסחו מסקנה כללית על סמך ממצאיכם.

כלל: כאשר המודולו הוא ראשוני, לכל מספר יש מספר הופכי. כיצד באה לידי ביטוי תכונה זו בטבלת הכפל?
מסקנה: פעולת החילוק בכל מספר שונה מ-0 היא אפשרית תמיד בקבוצת שאריות מודולו n , אם ורק אם n הוא מספר ראשוני.

$$1 : 1 \equiv 1 \odot 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$(3\text{-ו-}2 \text{ הם הופכיים}) \quad 4 : 3 \equiv 4 \odot 2 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$(2\text{-ו-}4 \text{ הם הופכיים}) \quad 3 : 4 \equiv 3 \odot 2 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$(3\text{-ו-}5 \text{ הם הופכיים}) \quad 5 : 3 \equiv 5 \odot 5 \equiv 4 \pmod{7}$$

פעולת הכפל המודולרי ופעולת החילוק המודולרי הן שתי פעולות הפוכות.
לכן אפשר כמובן לבדוק ואף לבצע את פעולת החילוק (כאשר מותר) בעזרת לוח הכפל.

$$4 : 3 \equiv ? \pmod{5} \quad \text{או: } ? \odot 3 \equiv 4 \pmod{5} \quad \text{ולפי הטבלה התשובה היא } 3.$$

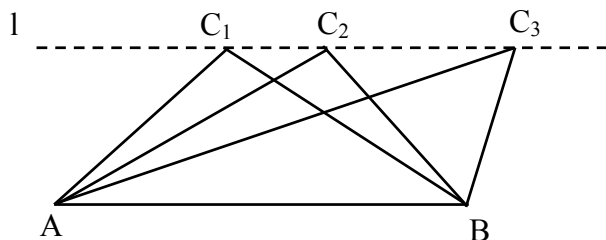
$$3 : 4 \equiv ? \pmod{7} \quad \text{או: } ? \odot 4 \equiv 3 \pmod{7} \quad \text{ולפי הטבלה התשובה היא } 6.$$

תרגיל

- א. בדקו על פי לוחות הכפל של השאריות מודולו 6, 8, 9, לאילו מספרים יש הופכי?
- ב. מהו הקשר בין המספרים שמצאתם לבין המודולו?
- ג. מהם המספרים המופיעים בשורה/טור של המספרים שמצאתם?

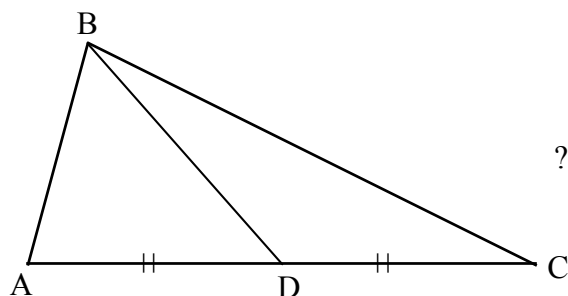
פעילות בנושא צורות שוות שטח

תזכורת



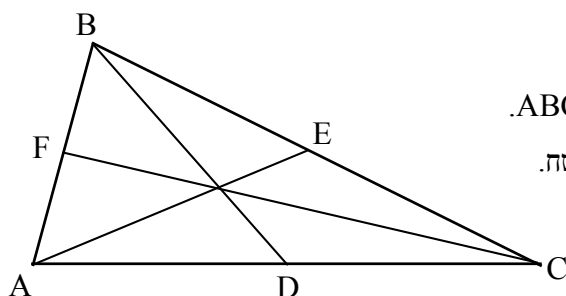
1. הישר l מקביל לקטע AB .

מה ניתן לומר על שטחי המשולשים ABC_1 , ABC_2 , ABC_3 ? נמק!



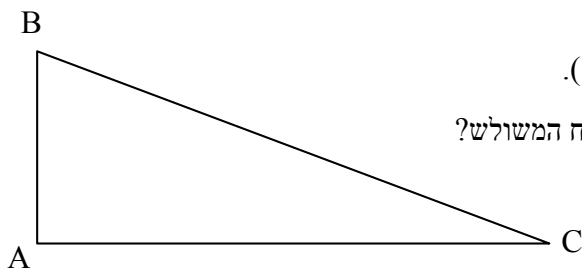
2. BD הוא תיכון במשולש ABC .

מה ניתן לומר על שטחי שני המשולשים שהוא יוצר? נסחו מסקנה.



3. AE , BD , CF הם שלושת התיכונים במשולש ABC .

הוכיחו שששת המשולשים שהתקבלו הם שווים שטח.

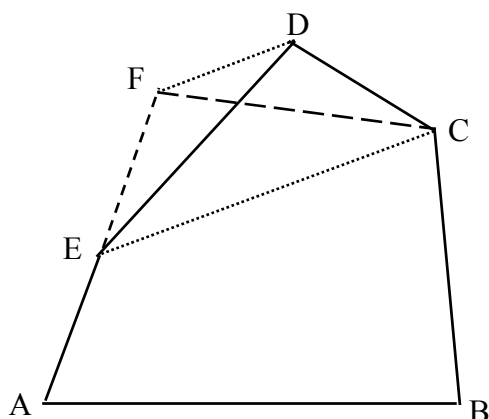


4. נתון משולש ישר זווית ABC ($\angle A = 90^\circ$).

כיצד נבנה מלבן $ADEF$ ששטחו שווה לשטח המשולש? האם קיימת יותר מדרך אחת לכך?

5. נתון משולש ABC .

כיצד נבנה מלבן $ADEF$ ששטחו שווה לשטח המשולש?



6. נתון מחומש קמור $ABCDE$.

דרך קודקוד D מעבירים ישר מקביל לאלכסון EC החותך את המשך הצלע AE בנקודה F . יש להוכיח:

שטח המחומש $ABCDE$ ושטח המרובע $ABCF$ שווים.

ב. כדי לקבל משולש שווה שטח למרובע ABCF, מה יהיה השלב הבא?

ג. כיצד נבנה מלבן, ששטחו שווה לשטח המשולש מהסעיף הקודם?

ד. כיצד נוכל ממצולע נתון לבנות מצולע בעל מספר קטן יותר של צלעות כך ששטחיהם שווים?

7. נא להשלים את המסקנות בעקבות עבודתך:

א. מכל מצולע בעל n צלעות ניתן לבנות מצולע בעל צלעות בעל אותו שטח.

ב. מכל מצולע בעל n צלעות ניתן לבנות בעל אותו שטח.

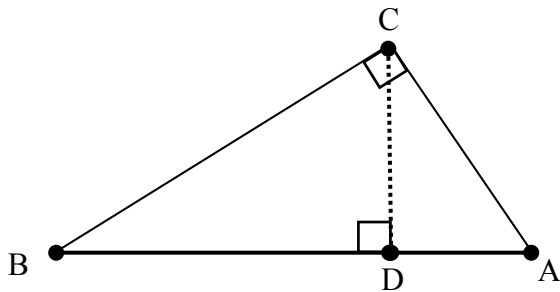
8. נתון משולש ישר זווית ABC. ($\angle C = 90^\circ$).

CD גובה ליתר AB.

הוכיחו בעזרת דמיון משולשים

או בעזרת משפט פיתגורס :

$$\boxed{CD^2 = AD \cdot BD}$$



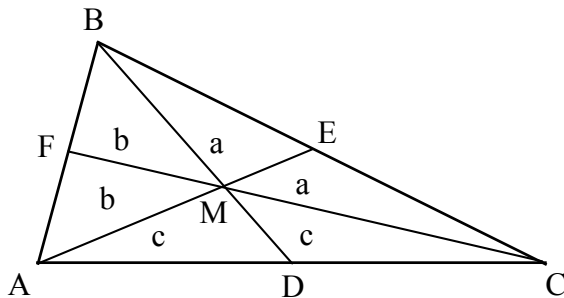
9. כיצד נוכל "לרבע" מלבן, כלומר לבנות ריבוע ששטחו שווה לשטח המלבן?

(המשימה היא למצוא קטע- צלע הריבוע, שריבועו שווה למכפלת שני קטעים נתונים - צלעות המלבן).

הצעות לפתרון 3

הם שלושת התיכונים במשולש ABC, AE, BD, CF.

מכאן שגם MD, ME, MF הם תיכונים במשולשים AMC, BMC, AMB בהתאמה.



$$S_{\triangle BME} = S_{\triangle CME} = a$$

$$S_{\triangle BMF} = S_{\triangle AMF} = b$$

$$S_{\triangle AMD} = S_{\triangle CMD} = c$$

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACE}$$

$$2b + a = 2c + a \Rightarrow b = c$$

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD}$$

$$3b = b + 2a \Rightarrow b = a \Rightarrow \boxed{a = b = c}$$

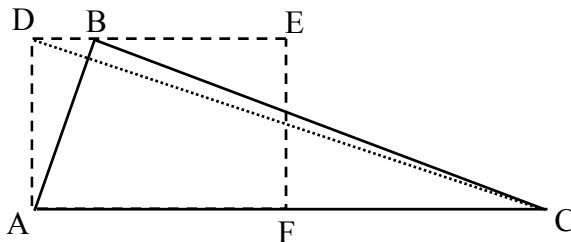
הצעת פתרון ל-5

צלע אחת של המלבן AD, שווה למחצית הצלע AC.

הצלע השנייה שווה לגובה לאותה צלע.

ניתן לצייר קודם משולש ADC ישר זווית ושווה

שטח למשולש ABC.

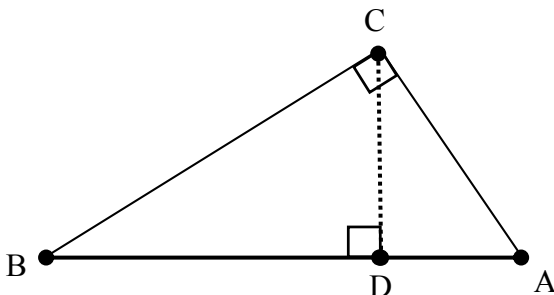


הצעות הוכחה ל-8

א. לפי דמיון משולשים על פי זוויות:

$$\triangle BCD \sim \triangle CAD$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD} = \frac{BC}{CA} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD$$



ב. בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית נרשום את משפט פיתגורס:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad : \triangle ABC$$

$$+ \begin{cases} AD^2 + BD^2 = AC^2 & : \triangle ACD \\ CD^2 + BD^2 = BC^2 & : \triangle BCD \end{cases}$$

$$\overline{AD^2 + CD^2 + 2BD^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2}$$

$$AD^2 + CD^2 + 2BD^2 = AB^2 = (AD + CD)^2$$

$$AD^2 + CD^2 + 2BD^2 = AD^2 + 2AD \cdot CD + CD^2$$

⇓

$$BD^2 = AD \cdot CD$$

הצעות פתרון ל-9

נתון מלבן שאורכי צלעותיו m ו- n .

עלינו למצוא קטע q כך ש- $q^2 = m \cdot n$

I לפי תכונות משולש ישר זווית

$$BD = m$$

א. מאריכים את BD כך ש: $DA = n$

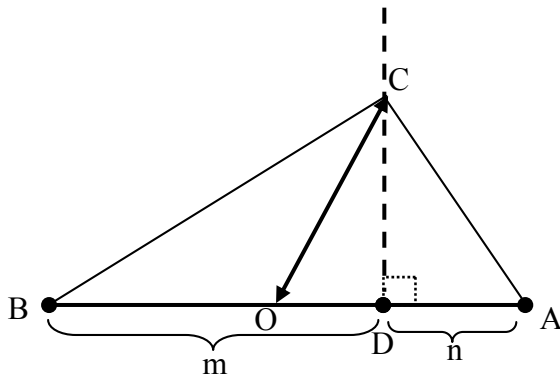
ב. בנקודה D מעלים אנך לקטע BA .

ג. מנקודה O שהיא אמצע הקטע BA , מקצים

קטע באורך מחצית BA , ומקבלים את נקודה C .

ד. הסבירו מדוע המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle BCA = 90^\circ$).

ה. $CD = q$ הוא אורך צלע הריבוע הדרוש.



II הדרך לרבע מלבן לפי טענה 14 בכרך שני של ה"יסודות" של אוקלידס:

נתון מלבן $ABCD$ שצלעותיו m ו- n .

א. מאריכים את BC כך ש- $CE = CD$

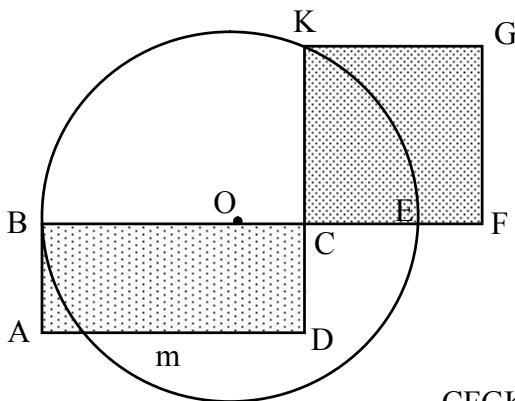
ב. מסמנים את אמצע הקטע BE ב- O .

ג. משרטטים מעגל שמרכזו ב- O ורדיוסו הוא BO .

ד. ממשיכים את DC עד לנקודת החיתוך עם המעגל ב- K .

$$CK^2 = BC \cdot CE = m \cdot n$$

ו. ממשיכים את CE כך ש- $CF = CK$ ומשלימים את הריבוע $CFGK$.



סימני התחלקות

התחלקות ב-2

ספרת היחידות חייבת להיות מספר זוגי.

התחלקות ב-5

ספרת היחידות היא 0 או 5

התחלקות ב-4

המספר המורכב משתי הספרות הימניות צריך להתחלק ב-4.

הוכחה: כיון שמפרידים את המספר לשתי קבוצות שהימנית בהן היא בת שתי ספרות, המספר הנתון הוא: $100a + b$.

$100a$ הוא כפולה של 4, וכדי שהסכום יתחלק ב-4, מספיק שהמספר השני b יתחלק ב-4.

התחלקות מספר דו ספרתי ב-4:

אם קשה לזהות התחלקות ב-4 של מספר דו ספרתי, מחברים את ספרת היחידות לפעמיים ספרת העשרות. התחלקות מספר זה ב-4 מוכיחה התחלקות המספר הנתון ב-4.

דוגמא: המספר 72: $2 \cdot 7 + 2 = 16$. התוצאה מתחלקת ב-4, לכן גם 72 מתחלק ב-4.

הוכחה: $10a + b = 8a + (2a + b)$. המחובר הראשון הוא כפולה של 4, וכדי שהסכום יתחלק ב-4, מספיק שהמחובר השני יתחלק ב-4.

התחלקות ב-8

המספר המורכב מ-3 ספרות אחרונות צריך להתחלק ב-8

הוכחה: כיון שמפרידים את המספר לשתי קבוצות שהימנית בהן היא בת שלוש ספרות, המספר הנתון הוא:

$$1000a + b$$

$1000a$ הוא כפולה של 8, וכדי שהסכום יתחלק ב-8, מספיק שהמספר השני b יתחלק ב-8.

התחלקות מספר תלת ספרתי ב-8:

אם קשה לזהות התחלקות ב-8 של מספר תלת ספרתי, מחברים את ספרת היחידות לפעמיים ספרת העשרות ולארבע פעמים ספרת המאות. התחלקות סכום זה ב-8 מוכיחה התחלקות המספר המקורי ב-8.

דוגמא: המספר 752: $4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 2 = 40$. התוצאה מתחלקת ב-8, לכן גם 752 מתחלק ב-8.

הוכחה: $100a + 10b + c = (96a + 8b) + (4a + 2b + c)$. המחובר הראשון הוא כפולה של 8, וכדי שהסכום יתחלק

ב-8, מספיק שהמחובר השני יתחלק ב-8.

התחלקות מספר דו ספרתי ב-8:

שיטה והוכחה בדיוק כמו עבור 4.

העקרונות עליהם מתבססים בהוכחות הבאות:

- אם מספר א' מתחלק ללא שארית במספר ב', גם כפולה של מספר א' תתחלק ללא שארית במספר ב'.
- אם מספר א' ומספר ב' מתחלקים ללא שארית במספר ג', גם סכומם והפרשתם מתחלק במספר ג'.

התחלקות ב-3

סכום הספרות (ולכן גם סכום הספרות הסופי) חייב להתחלק ב-3.

דוגמא: 2274. נחבר את הספרות: $2+2+7+4=15$. סכום זה מתחלק ב-3, לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-3.

הוכחה: נרשום מספר כללי בן $n+1$ ספרות:

a_n		a_3	a_2	a_1	a_0	
10^n		10^3	10^2	10	1	ערך הספרה
a_n		a_3	a_2	a_1	a_0	הספרה

ערכי הספרות המתאימות:

$$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^{n-2} \cdot a_{n-2} + \dots + 10^1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0$$

נרשום במקום 10 בכל מחובר $9+1$, ונקבל:

$$(9+1)^n \cdot a_n + (9+1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + (9+1)^{n-2} \cdot a_{n-2} + \dots + (9+1)^1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0$$

עם פתיחת הסוגריים בכל מחובר פרט לאחרון, נקבל כפולות של 9 ו- a_n ובסה"כ:

$$9^n \cdot a_n + \dots + a_n + \dots + 9 \cdot a_1 + a_1 + a_0 = 9k + (a_n + \dots + a_1 + a_0)$$

כדי שסכום זה יתחלק ב-3, מספיק שהמחבר השני $a_n + \dots + a_1 + a_0$ יתחלק ב-3.

התחלקות ב-9

סכום הספרות (ולכן גם סכום הספרות הסופי) חייב להתחלק ב-9.

דוגמא: המספר 64368. נחבר את הספרות: $6+4+3+6+8=27$. סכום זה מתחלק ב-9, לכן גם המספר הנתון

מתחלק ב-9.

הוכחה: זהה להוכחה עבור 3.

התחלקות ב-7

שיטה א':

חלק את המספר לשני חלקים: (I) המספר הנוצר משתי הספרות הימניות (II) המספר הנוצר משאר הספרות. כפול

את (II) ב-2 וחבר למכפלה את (I).

אם הסכום קטן מ-100 ומתחלק ב-7, אזי המספר מתחלק ב-7. אם הסכום גדול מ-100, חזור על התהליך.

דוגמאות:

1. המספר 1617: $32 \cdot 2 + 17 = 49$, קיבלנו 49 שמתחלק ב-7, לכן המספר הנתון - 1617 מתחלק ב-7.

2. המספר 24164 : $241 \cdot 2 + 64 = 546$ קיבלנו מספר בן 3 ספרות. כדי להקל, נחזור על התהליך :
 $56 = 5 \cdot 2 + 46$. קיבלנו 56 שמתחלק ב-7, לכן גם המספר הנתון 24164 מתחלק ב-7.
הוכחה: כיון שמפרידים את המספר לשתי קבוצות, שהימנית בהן היא בת שתי ספרות, המספר הנתון הוא: $100a + b$.
 נרשום מספר זה כסכום של $98a$ (שהוא כפולה של 7), ועוד מספר: $100a + b = 98a + (2a + b)$.
 כדי שסכום זה יתחלק ב-7, מספיק שהמחומר השני $2a + b$ יתחלק ב-7.

שיטה ב

כפול את ספרת האחדות ב-2, חסר את התוצאה מהמספר המורכב משאר הספרות.
 חזור על התהליך עד לזיהוי מספר דו ספרתי המתחלק/או לא, ב-7.
דוגמא: המספר 24164 : $2416 - 2 \cdot 4 = 2408$, ממשיכים: $240 - 2 \cdot 8 = 224$, ממשיכים: $22 - 2 \cdot 4 = 14$. קיבלנו
 14 שמתחלק ב-7 לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-7.
הוכחה: בשיטה זו מפרידים את הספרה האחרונה, לכן נרשום את המספר הנתון: $10a + b$. אם מספר זה מתחלק ב-7,
 גם כל כפולה שלו מתחלקת ב-7. נתבונן בביטוי: $2(10a + b) = 20a + 2b = 21a + (2b - a)$.
 כדי שסכום זה יתחלק ב-7, מספיק שהמחומר השני $|2b - a|$ יתחלק ב-7.

התחלקות ב-11

שיטה א

חבר את הספרות המקומות הזוגיים. חבר את הספרות במקומות האי-זוגיים.
 חסר את המספר הקטן מהמספר הגדול. אם ההפרש מתחלק ב-11 – מתחלק בו גם המספר המקורי.
דוגמא: המספר 3916 : במקומות האי-זוגיים: $9 + 6 = 15$. במקומות הזוגיים: $3 + 1 = 4$. ההפרש: $15 - 4 = 11$. ההפרש
 מתחלק ב-11, לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-11.

הוכחה: נרשום מספר כללי בן $n+1$ ספרות:

a_n		a_3	a_2	a_1	a_0	
-------	------	-------	-------	-------	-------	--

10^n		10^3	10^2	10	1	ערך הספרה
a_n		a_3	a_2	a_1	a_0	הספרה

ערכי הספרות המתאימות:

$$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^{n-2} \cdot a_{n-2} + \dots + 10^1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0$$

נרשום במקום 10 בכל מחובר 11-1, ונקבל:

$$(11-1)^n \cdot a_n + (11-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + (11-1)^{n-2} \cdot a_{n-2} + \dots + (11-1)^1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_0$$

עם פתיחת הסוגריים בכל מחובר פרט לאחרון, נקבל כפולות של 11 ו- a_n עם מקדם 1 או -1 לסירוגין, ובסה"כ:

$$11^n \cdot a_n + \dots + (-1)^n \cdot a_n + \dots + 11 \cdot a_1 - a_1 + a_0 = 11k + [(-1)^n \cdot a_n + \dots - a_1 + a_0]$$

כדי שסכום זה יתחלק ב-11, מספיק שהמחומר השני $|(-1)^n \cdot a_n + \dots - a_1 + a_0|$ יתחלק ב-11.

שיטה ב

חסר את ספרת היחידות מהמספר הנוצר משאר הספרות. חזור על התהליך עד לזיהוי מספר דו ספרתי המתחלק/או לא, ב-11.

דוגמא: המספר 3916: $391-6=385$, ממשיכים: $38-5=33$, קיבלנו 33 שמתחלק ב-11, לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-11.

הוכחה: כיון שמפרידים את המספר לשתי קבוצות, שהימנית בהן היא בת ספרה אחת, המספר הנתון הוא $10a + b$. נרשום מספר זה כסכום של $11a$ וביטוי נוסף: $10a + b = 11a + (b-a)$. כדי שסכום זה יתחלק ב-11, מספיק שהמחומר השני $b-a$ יתחלק ב-11.

התחלקות ב-13

שיטה א

כפול את ספרת היחידות ב-9 וחסר את המכפלה ממספר המורכב משאר הספרות. חזור על התהליך עד קבלת מספר דו ספרתי.

אם המספר האחרון מתחלק ב-13, יתחלק בו גם המספר המקורי.

דוגמא: 84773: שלב ראשון $8477-9 \cdot 3 = 8450$, שלב שני $845-9 \cdot 0 = 845$, שלב שלישי $84-9 \cdot 5 = 39$. התוצאה מתחלקת ב-13, לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-13.

הוכחה: בשיטה זו מפרידים את הספרה האחרונה, לכן נרשום את המספר הנתון: $10a+b$. אם מספר זה מתחלק ב-13, גם כל כפולה שלו מתחלקת ב-13. נתבונן בביטוי: $9(10a+b) = 90a+9b = 91a+(9b-a)$. כדי שסכום זה יתחלק ב-13, מספיק שהמחומר השני $|9b-a|$ יתחלק ב-13.

שיטה ב

חלק את המספר לשני חלקים: I המספר הנוצר משלוש הספרות הימניות II המספר הנוצר משאר הספרות. חסר את המספר הקטן מהגדול. אם ההפרש מתחלק ב-13, מתחלק בו גם המספר המקורי.

דוגמא: 84773: שלב ראשון $|84-773| = 689$, שלב שני אפשר להמשיך לפי שיטה א: $|68-9 \cdot 9| = 13$. התוצאה מתחלקת ב-13, לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-13.

הוכחה: כיון שמפרידים את המספר לשתי קבוצות, שהימנית בהן היא בת שתי ספרות, המספר הנתון הוא: $1000a + b$. נרשום מספר זה כסכום של $1001a$ שהוא כפולה של 13 ועוד מספר: $1000a + b = 1001a + (b-a)$. כדי שסכום זה יתחלק ב-13, מספיק שהמחומר השני $b-a$ יתחלק ב-13.

שיטה ג

כפול את ספרת היחידות ב-4 וחבר את המכפלה מספר המורכב משאר הספרות. חזור על התהליך עד קבלת מספר דו ספרתי.

אם המספר האחרון מתחלק ב-13, יתחלק בו גם המספר המקורי.

דוגמא: 84773: שלב ראשון $8477+4 \cdot 3 = 8489$, שלב שני $848+4 \cdot 9 = 884$, שלב שלישי $88+4 \cdot 4 = 104$.

שלב רביעי $10+4\cdot4=26$. התוצאה מתחלקת ב-13, לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-13.
הוכחה: בשיטה זו מפרידים את הספרה האחרונה, לכן נרשום את המספר הנתון: $10a+b$. אם מספר זה מתחלק ב-13, גם כל כפולה שלו מתחלקת ב-13. נתבונן בביטוי: $4(10a+b) = 40a+4b = 39a+(a+4b)$.
 כדי שסכום זה יתחלק ב-13, מספיק שהמחזור השני $|a+4b|$ יתחלק ב-13.

התחלקות ב-17

כפול את ספרת היחידות ב-5 וחסר את המכפלה מהמספר המורכב משאר הספרות.
 חזור על התהליך עד קבלת מספר דו ספרתי.
 אם המספר האחרון מתחלק ב-17, יתחלק בו גם המספר המקורי.
דוגמא: המספר 9979. שלב ראשון: $997-5\cdot9 = 952$, שלב שני: $95-5\cdot2 = 85$.
 התוצאה מתחלקת ב-17, לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-17.

חלוקה ב-19

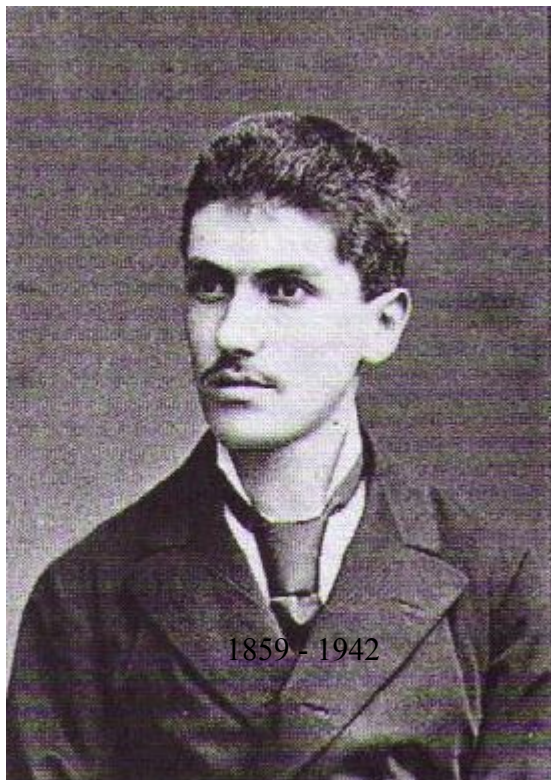
כפול את ספרת היחידות ב-2 וחבר את המכפלה למספר המורכב משאר הספרות.
 חזור על התהליך עד קבלת מספר דו ספרתי.
 אם המספר האחרון מתחלק ב-19, יתחלק בו גם המספר המקורי.
דוגמא: המספר 4864. שלב ראשון: $486+2\cdot4 = 494$, שלב שני: $49+2\cdot4 = 57$.
 התוצאה מתחלקת ב-19, לכן גם המספר הנתון מתחלק ב-19.

תרגילים

- א. ממספר דו-ספרתי יוצרים שני מספרים תלת ספרתיים:
 המספר הראשון מתקבל כאשר רושמים 5 מימין למספר הנתון, והמספר השני מתקבל כאשר רושמים 7 משמאל למספר הנתון.
 אם מחלקים את המספר התלת ספרתי השני במספר התלת ספרתי הראשון, מקבלים מנה 3 ושארית 18.
 מצאו את המספר הדו ספרתי.
- ב. נתונים שני מספרים שסכומם הוא 1244.
 אם נכתוב במספר הראשון, אחרי ספרת היחידות, את הספרה 3, ואת המספר השני נקצר ע"י מחיקת ספרת היחידות השווה ל-2, נקבל שני מספרים שווים. מצא את המספרים הנתונים.
- ג. נתונים שני מספרים דו ספרתיים שאחד מהם גדול מהשני ב-5. יוצרים מהם שני מספרים באופן הבא:
 I. כותבים תחילה את המספר הדו ספרתי הקטן מבין השניים, מימין לספרת יחידותיו רושמים הספרה 2, ומימינה את המספר הדו ספרתי הגדול מבין השניים.

II. רושמים תחילה את המספר הדו-ספרתי הגדול מבין השניים, מימין לספרת יחידותיו רושמים את המספר הדו ספרתי הקטן מבין השניים, ואת המספר שהתקבל כופלים פי 5. סכום שני המספרים שהתקבלו הוא 17765. מצא את שני המספרים הדו ספרתיים הנתונים.

משפט פיק



אלכסנדר גאורג פיק (Georg Alexander Pick)

פרופסור למתמטיקה אוסטרי יהודי .

אלכסנדר גאורג פיק נולד בשנת 1859.

עד גיל אחת עשרה למד בבית עם הוריו - אדולף וז'וספה פיק .

מאוחר יותר נשלח לבית ספר והתקבל בגיל 16 ללימודי מתמטיקה ופילוסופיה באוניברסיטת וינה.

כשהיה בגיל עשרים ואחד סיים את עבודת הדוקטורט ונתמנה כמרצה למתמטיקה ופיזיקה באוניברסיטה. בגיל עשרים ותשע התמנה לפרופסור.

פיק פרסם ששים ושבעה מאמרים במגוון רחב של תחומים - גיאומטריה, אלגברה לינארית, חשבון אינטגרלי ובעיקר אנליזה מורכבת.

על שמו המושגים - "מטריצת פיק", "אינטרפליציית פיק במישור המורכב".

בשנת 1900 התמנה פיק כדיקן הפקולטה לפילוסופיה באוניברסיטת פראג והיה חבר בוועדת המינויים. פיק ואלברט איינשטיין היו חברים ושיתפו פעולה במוסיקה ובתחומים מדעיים.

פיק שהיה נגן כינור, הכיר לאלברט איינשטיין את הקהילה המדעית והמוזיקלית בפראג ואף דחף לקבלתו כפרופסור בפקולטה.

בשנת 1942 נעצר פיק ע"י הנאצים ונשלח למחנה טרזינשטט, שם נפטר בגיל שמונים ושתיים. לפני מותו העביר את כינורו לחברו הפרופסור הרברט אונגר ששרד את השואה ושמר על הכינור עד היום.

בשנת 2011 במימון ממשלת גרמניה, התקיימה תערוכה בבית התפוצות על תרומתם של המדענים היהודים שפעלו בגרמניה עד עליית הנאצים. תערוכה זו מהווה הכאה על חטא על עוול הנורא שנגרם להם. צריך לזכור שהמדענים היהודים היוו 30% מכל המדענים בגרמניה, וזאת למרות שהיהודים היוו אחוז אחד באוכלוסייה. נכדתו של פרופסור אונגר, ההיסטוריונית דר' רות אונגר, הביאה את הכינור לפתיחת התערוכה. הקהל היה נרגש מאד כאשר נגן התזמורת הפילהרמונית ניגן בכינור של פיק יצירה של מנדלסון, שהייתה חביבה על פיק .

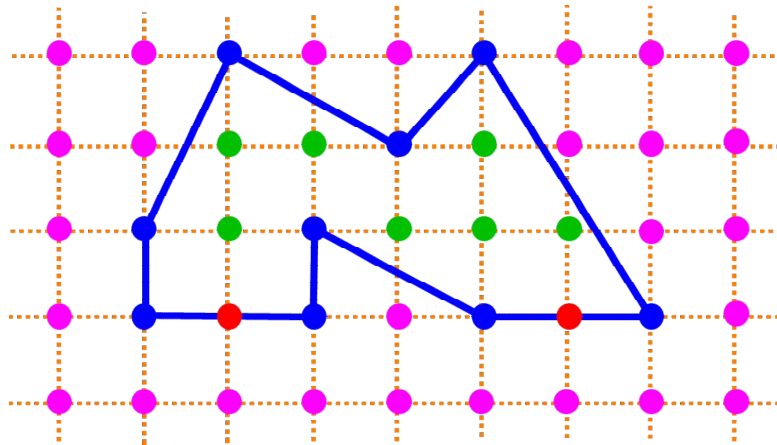
בפרק זה נלמד את "משפט פיק" - תרומתו החשובה בגיאומטריה.

המאמר על "משפט פיק" בגיאומטריה פורסם בשנת 1899 ולא זכה לתשומת לב בחייו של פיק.

רק ב- 1969, עשרים ושבע שנים אחרי מותו, קיבל הערכה מיוחדת על ידי קהילת המתמטיקאים. בעיקר בשל הפשטות והאלגנטיות, וגם בשל היותו כלי חשוב בפתרון בעיות ובמחקר במגוון נושאים.

מצולעי סריג

מצולעים קמורים או קעורים אשר קדקודיהם ממוקמים בנקודות סריג.



$$A_p = \frac{1}{2}B + I - 1 \quad \text{נוסחת פיק}$$

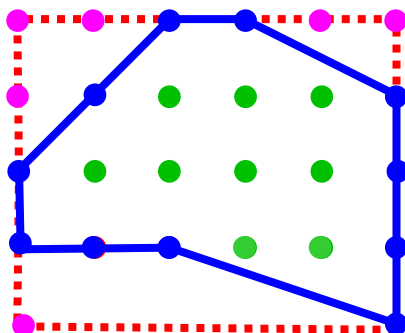
A_p	שטח המצולע P (Area of Polygon)
B	מספר הנקודות על היקף המצולע (Boundary)
I	מספר הנקודות בתוך המצולע (Interior)

הקשר בין שטח המצולע לנקודות הסריג

B - מספר נקודות הסריג שעל הצלעות

I - מספר נקודות השריג הפנימיות

דוגמה I:



$$B = 11$$

$$I = 9$$

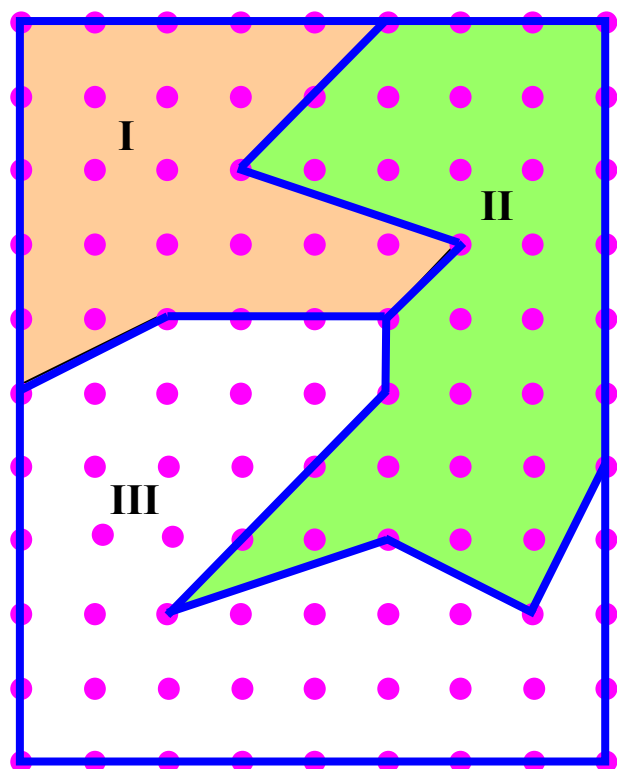
$$A = \frac{11}{2} + 9 - 1 = 13\frac{1}{2}$$

שטח המלבן פחות השטחים החיצוניים

$$A = 4 \cdot 5 - \left(\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot (2+5)}{2} \right) = 20 - \left(2 + 1 + 3\frac{1}{2} \right)$$

$$A = 13\frac{1}{2}$$

דוגמה II



$$A_I = \frac{1}{2} \cdot 18 + 11 - 1 = 19$$

$$A_{II} = \frac{1}{2} \cdot 20 + 18 - 1 = 27$$

$$A_{III} = \frac{1}{2} \cdot 28 + 21 - 1 = 34$$

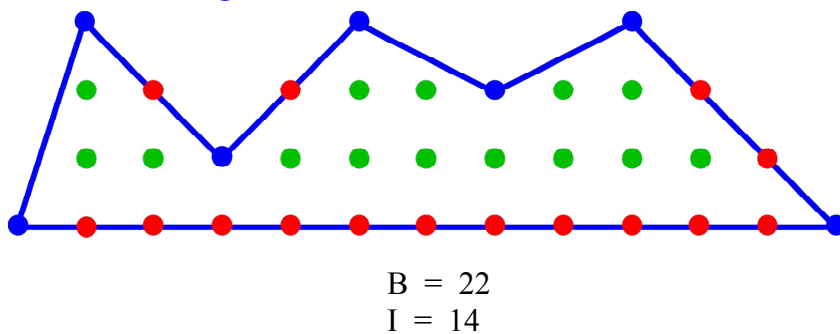
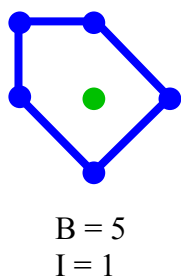
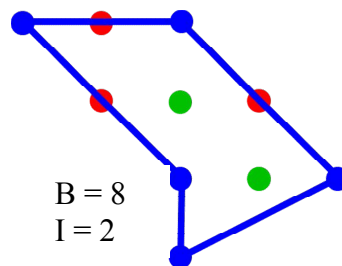
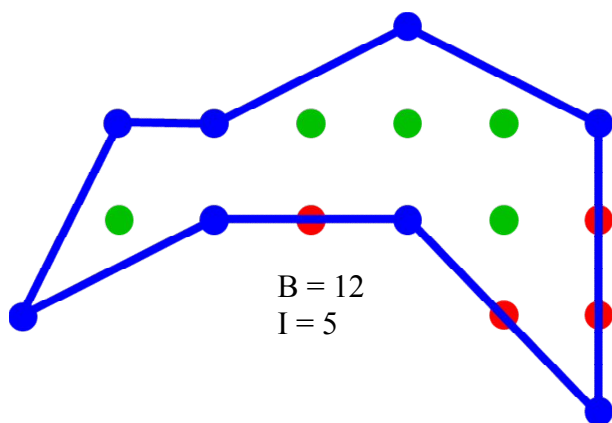
שטח המלבן :

$$A = 8 \cdot 10 = 80$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 36 + 63 - 1 = 80$$

תרגיל

מצא את השטחים של הצורות הבאות:



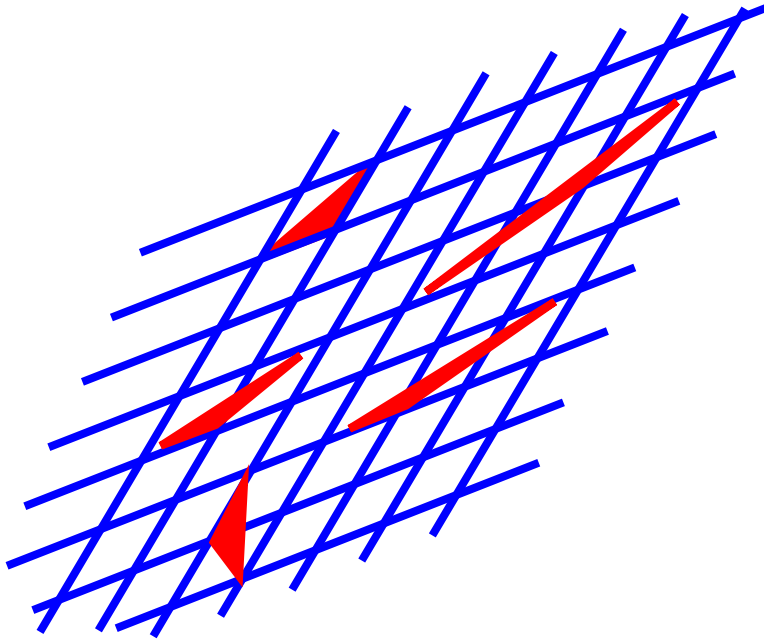
משמעויות מנוסחת פיק

א. מצולעים, שלהם מספר שווה של נקודות סריג בהיקף ומספר שווה של נקודות סריג פנימיות, שווים בשטחם.

ב. נקודות סריג פנימיות נוספת מגדילה את השטח ביחידה.

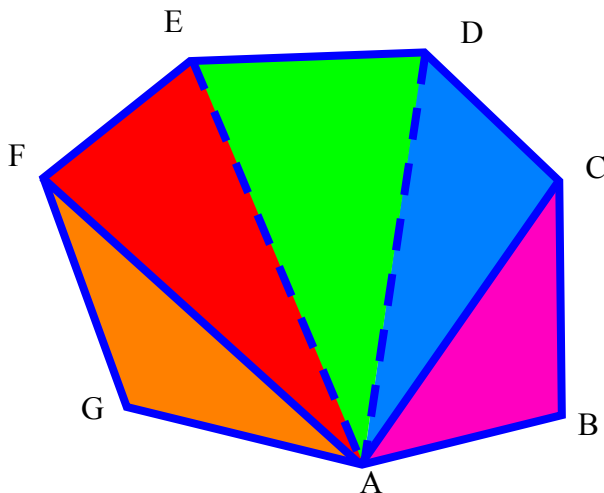
ג. נקודות סריג הנוספת על ההיקף, מגדילה את השטח בחצי יחידה.

משולש אלמנטרי הוא משולש שקדקודיו הן נקודות סריג ושאיין על צלעותיו או בתוכו נקודות סריג נוספות.



שטח משולש אלמנטרי שווה בערכו למחצית שטח מקבילית היחידה.

הזוויות הפנימיות במצולע:



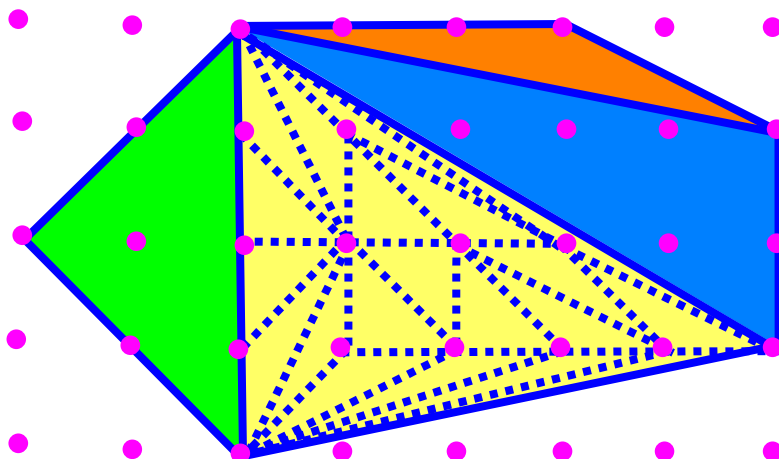
כל מצולע קמור בעל N צלעות ניתן לחלק ל- $N-2$ משולשים ומכאן: סכום הזוויות הפנימיות של מצולע הוא:

$$180^\circ(N-2)$$

משפט

א. כל מצולע שקדקודיו נקודות סריג ניתן לחלק למשולשים שקדקודיהם נקודות סריג.

ב. כל משולש כזה ניתן לחלק שוב למשולשים אלמנטריים ששטח כל אחד הוא $\frac{1}{2}$.



הוכחה לנוסחת פיק

B_1 - קודקודי המצולע

B_2 - נקודות סריג בתוך הצלעות

$B = B_1 + B_2$ - נקודות סריג על ההיקף

I - נקודות סריג פנימיות

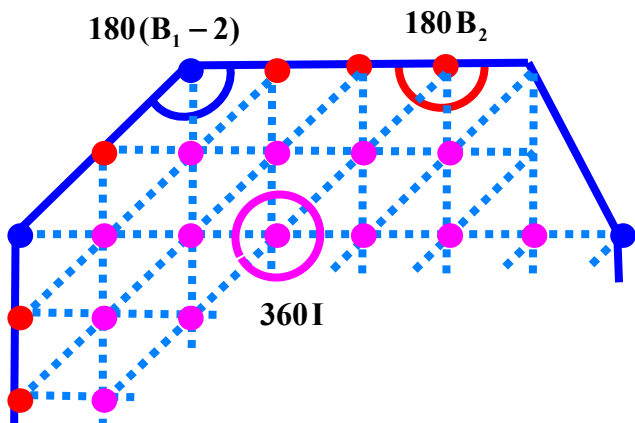
K - מספר המשולשים האלמנטריים המכסים את המצולע

סכום הזוויות במצולע הוא:

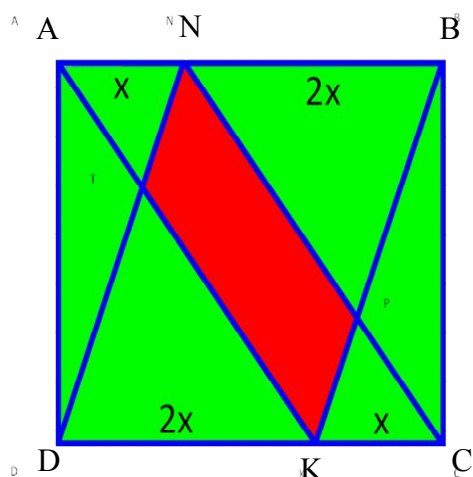
$$180K = 180(B_1 - 2) + 180B_2 + 360I$$

$$K = (B_1 + B_2) + 2I - 2 = B + 2I - 2$$

$$A_p = 2K \Rightarrow A_p = \frac{1}{2}B + I - 1$$



שאלה 1



בריבוע $ABCD$, $CK : KD = AN : NB = 1:2$,

מחברים את הנקודות ומקבלים מרובע פנימי (אדום בציור)

הוכיחו:

א. המרובע האדום הוא מקבילית.

ב. שטח המקבילית הוא $\frac{2}{9}$ משטח הריבוע.

שאלה 2

נתונים מצולעים בעלי אורכי הצלעות:

ב. $1, \sqrt{10}, \sqrt{17}$

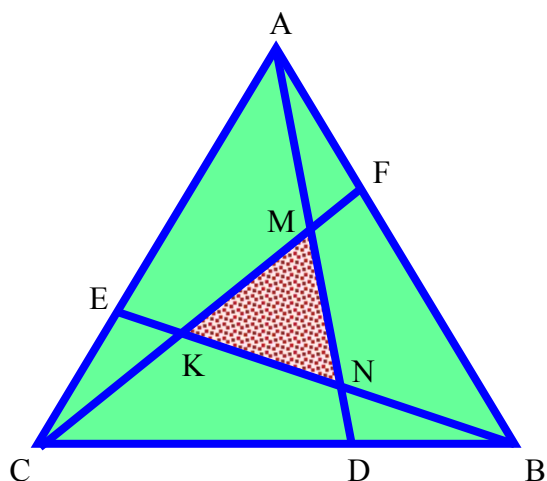
א. $1, \sqrt{17}, \sqrt{26}$

ד. $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{20}, \sqrt{17}, \sqrt{8}$ (מחומש קמור)

ג. $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{13}$

מצאו את שטחם (ללא מחשבון)

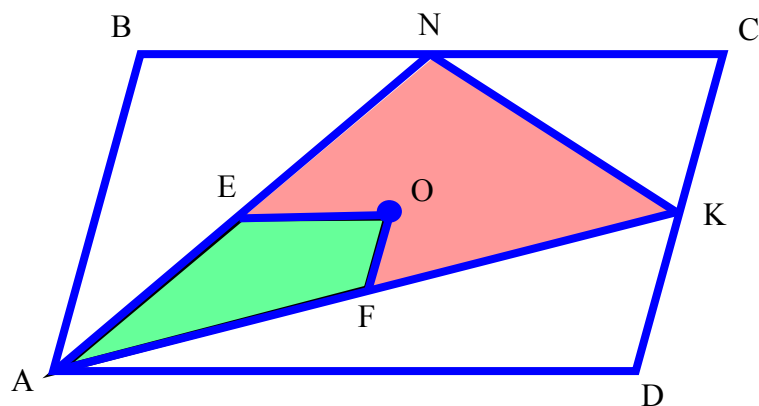
שאלה 3



נתון: $AB = AC = BC$, $\frac{AF}{BF} = \frac{BD}{CD} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$,

הוכיחו: $S_{MNK} : S_{AEC} = 1 : 7$

שאלה 4

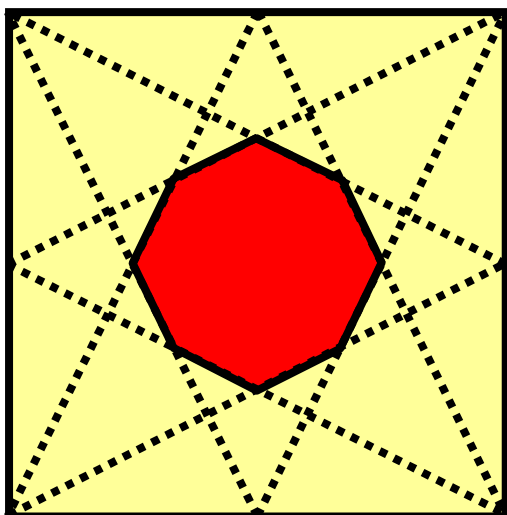


במקבילית $ABCD$, N אמצע BC , K אמצע CD ,

E אמצע AN , F אמצע AK .

O נקודת חיתוך אלכסוני המקבילית.

הוכח: $S_{AEOF} : S_{EOKN} = 1:2$



שאלה 5

בריבוע חיברו כל קדקוד עם אמצעי שתי הצלעות הנגדיות והתקבל מתומן. מהו היחס בין שטחיהם?

רמז: חלק את צלע ריבוע ל-12 חלקים.

שאלה 6

א. כמה פתרונות במספרים טבעיים יש למערכת:

$$\begin{cases} x + y < 40 \\ 2x - y > 8 \end{cases}$$

ב. כמה פתרונות במספרים שלמים יש למערכת:

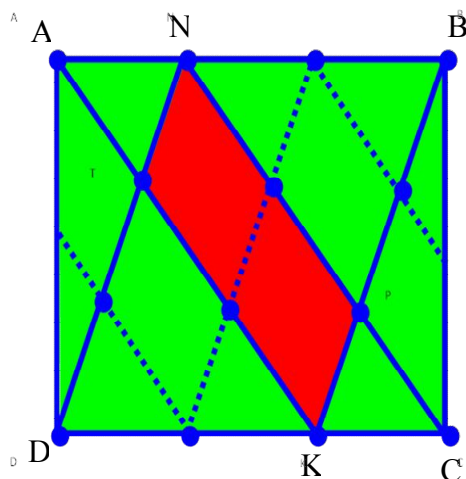
$$\begin{cases} |4x| + y - 9 < 0 \\ |x| + 2y + 24 > 0 \end{cases}$$

ג. כמה פתרונות במספרים שלמים יש למערכת:

$$\begin{cases} y + |3x| < 50 \\ 2y - |x| > 30 \end{cases}$$

פתרונות

שאלה 1



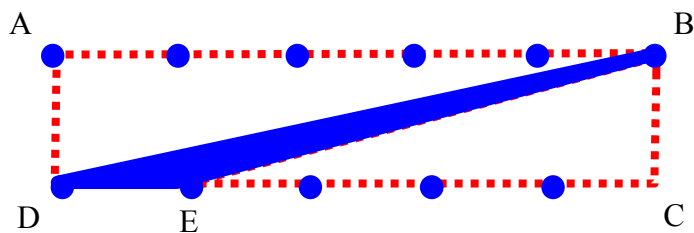
פתרון בעזרת נוסחת פיק ע"י פריסת רשת מקבילים

$$S = \frac{6}{2} + 0 - 1 = 2 \quad \text{שטח המקבילית}$$

$$S_{ABCD} = \frac{8}{2} + 6 - 1 = 9 \quad \text{שטח הריבוע}$$

$$S = \frac{2}{9} S_{\text{ריבוע}} \quad \text{לכן: מקבילית}$$

שאלה 2

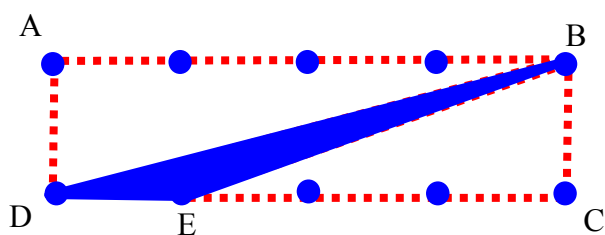


פתרון באמצעות סריג ומשולשים ישרי זווית

$$BD = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} \quad \text{א.}$$

$$BE = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

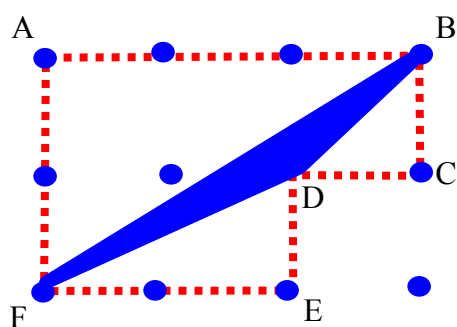
$$S_{BDE} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$DB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \quad \text{ב.}$$

$$BE = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$S_{BDE} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

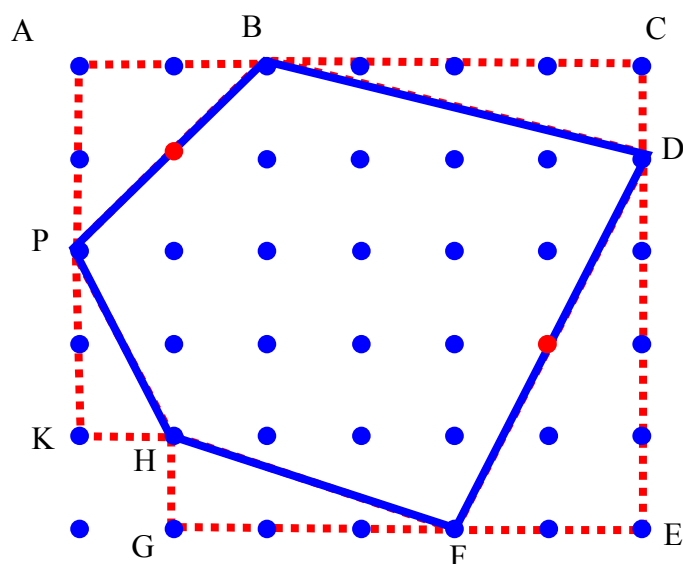


$$BF = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad \text{ג.}$$

$$BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$DF = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$S_{BDF} = 6 - 1 - \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{1}{2}$$



ד, נפתור באמצעות העברת רשת מקבילים

$$PB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$BD = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

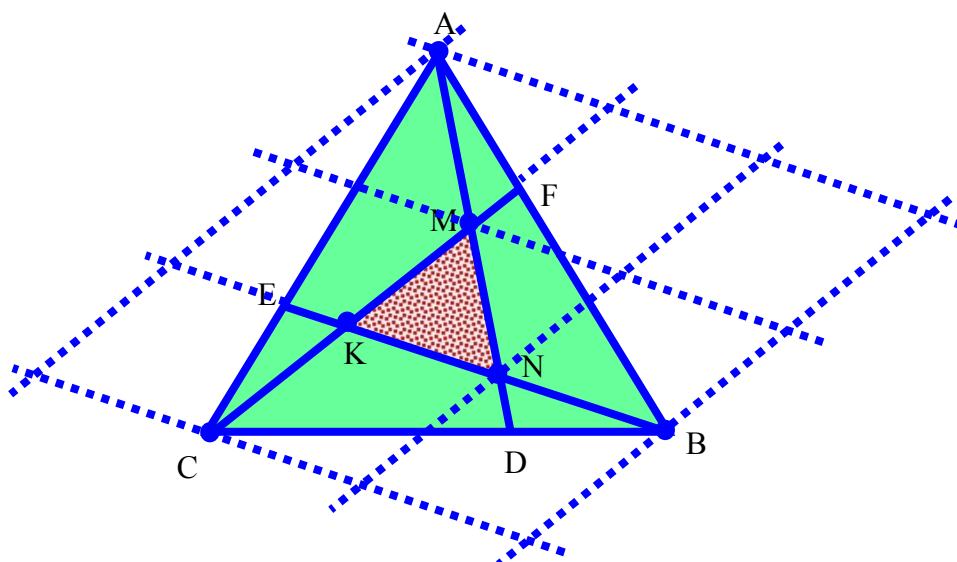
$$DF = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$FH = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$HP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

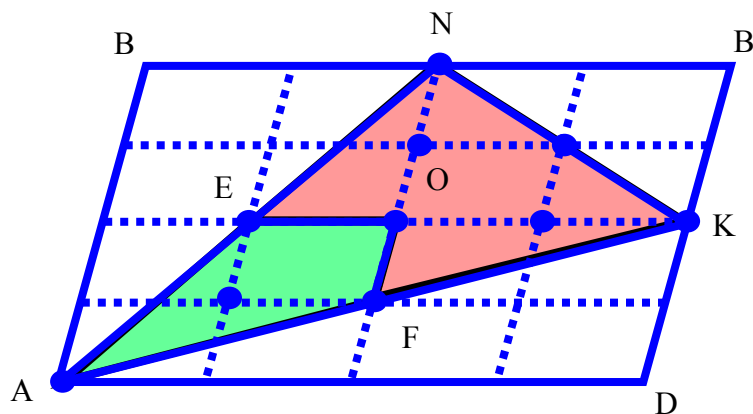
$$S_{BDFHP} = 30 - 1 - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} = 19$$

שאלה 3



$$\frac{S_{MNK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + 3 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

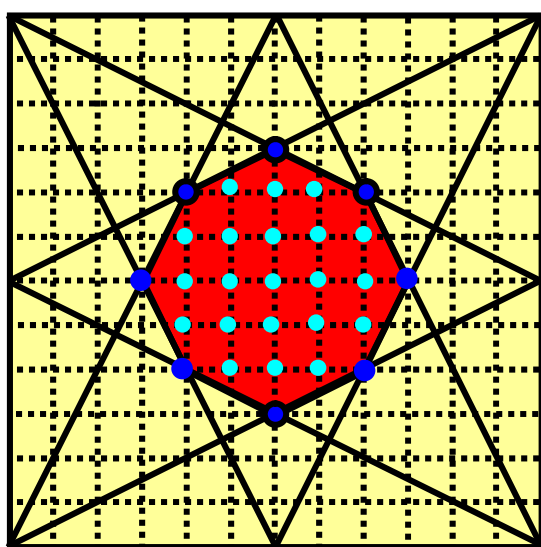
שאלה 4



פתרון בעזרת נוסחת פיק ע"י פריסת רשת מקבילים

$$\frac{S_{AEOF}}{S_{EOKN}} = \frac{\frac{4}{2} + 1 - 1}{\frac{6}{2} + 2 - 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

שאלה 5



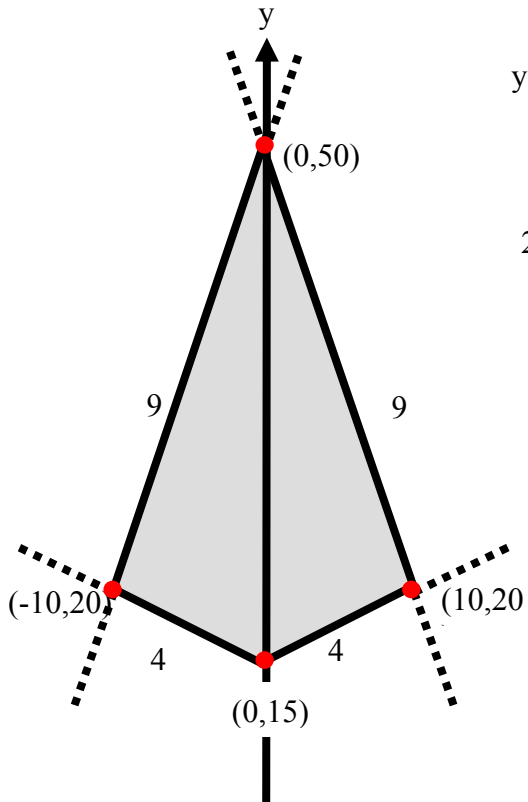
פתרון בעזרת נוסחת פיק ע"י פריסת רשת מקבילים

רק בחלוקת הצלע ל-12 כל הקודקודים

נמצאים על נקודות הרשת.

$$\frac{S_{\text{מתומן}}}{S_{\text{ריבוע}}} = \frac{\frac{8}{2} + 21 - 1}{12 \cdot 12} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$$

שאלה 6



$$y + |3x| < 50 \Rightarrow y < -|3x| + 50 \Rightarrow \begin{cases} y < 3x + 50, & x < 0 \\ y < -3x + 50, & x > 0 \end{cases}$$

$$2y - |x| > 30 \Rightarrow y > \frac{1}{2}|x| + 15 \Rightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{2}x + 15, & x > 0 \\ y > -\frac{1}{2}x + 15, & x < 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

$$\frac{20 \cdot 35}{2} = \frac{9 + 9 + 4 + 4 + 4}{2} + I - 1 \quad \text{חישוב שטח הדלתון:}$$

$$350 = 15 + I - 1$$

$$I = 336$$

עקרון שובך היונים

רקע הסטורי



יוהאן פטר גוסטב לז'ן דיריכלה Peter Gustav Lejeune Dirichlet

מתמטיקאי גרמני מהעיירה ריכלה בבלגיה.
למד עם טובי המתמטיקאים בצרפת.
לימד באוניברסיטת גטינגן בגרמניה.
לזכותו פיתוחים רבים במתמטיקה גבוהה.

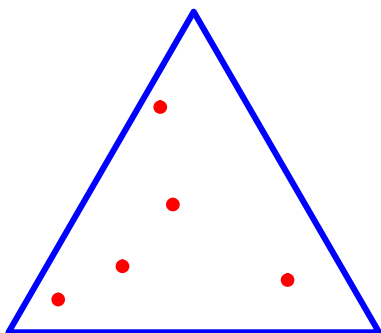
1805 – 1859

עיקרון שובך היונים

1. בחלוקת $n+1$ יונים ל- n תאי שובך, לפחות באחד מהתאים יהיו לפחות שתי יונים.
2. **בהכללה:** בחלוקת $nk+1$ פריטים ל- n תאים, יהיה לפחות תא אחד עם לפחות $k+1$ פריטים.
אם מספר התאים גדול ממספר הפריטים, לפחות תא אחד יהיה ריק.

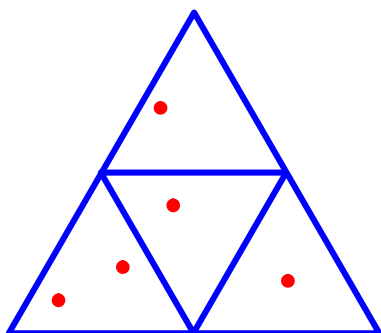
שאלה 1

נתונות 5 נקודות פנימיות במשולש שווה צלעות.
הראו כי ישנן שתי נקודות, שהמרחק בניהן קטן ממחצית הצלע.



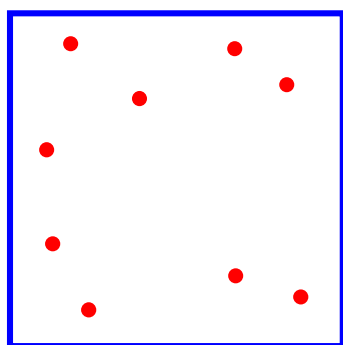
פתרון

מעבירים את שלושת קטעי האמצעים,
אורך כל אחד כמחצית הצלע.
אחד המשולשים מכיל לפחות שתי נקודות.
המרחק בין שתי הנקודות קטן מאורכו של קטע האמצעים.



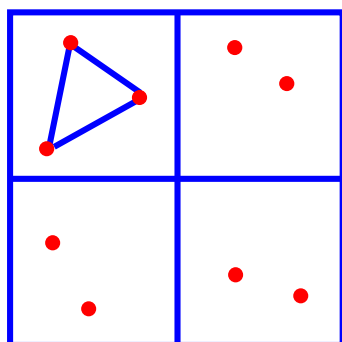
שאלה 2

נתונות 9 נקודות פנימיות בריבוע.
הראו כי 3 מבניהן יוצרות משולש,
ששטחו קטן מ- $\frac{1}{8}$ שטח הריבוע.



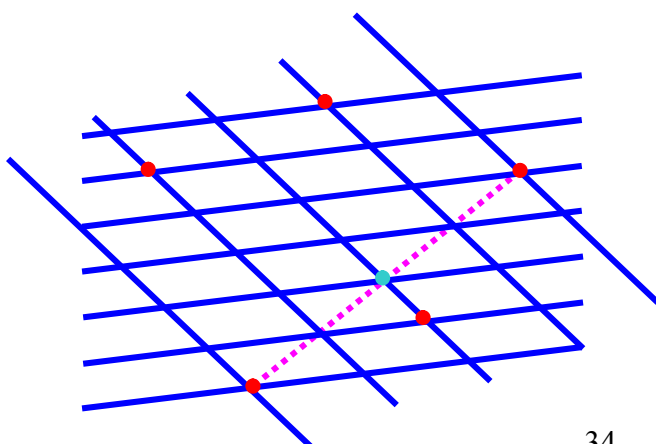
פתרון

נחלק את הריבוע ל-4 ריבועים חופפים.
באחד הריבועים יהיו לפחות 3 נקודות.
שטח המשולש שהן יוצרות, קטן ממחצית שטחו של ריבוע פנימי.
לכן קטן מ- $\frac{1}{8}$ שטח הריבוע.



שאלה 3

נתונות 5 נקודות סריג.
הראו כי קיימות זוג נקודות, שנקודת האמצע ביניהן
היא נקודת סריג.



פתרון

נקודות הסריג נחלקות לפי שעורי הנקודות ל-4 קבוצות:
(זוגי, זוגי) (אי-זוגי, אי-זוגי) (זוגי, אי-זוגי) (אי-זוגי, זוגי). לכן ישנן 2 נקודות מבין ה-5 הנמצאות באותה קבוצה.
סכומי השעורים של נקודות אלו הם שעורים זוגיים. לכן נקודת האמצע היא נקודת סריג.

שאלות

1. נתונים $n + 1$ מספרים טבעיים שונים. כל מספר קטן מ- $2n$.
הראו כי ישנם לפחות שני מספרים זרים (ללא גורם משותף).
2. נתונים 6 מספרים טבעיים.
הראו כי קיימים שני מספרים מביניהם, שסכומם או הפרשם מתחלק ב-9.
3. נתונים 5 מספרים טבעיים. לכל שני מספרים, סכומם והפרשם אינם מתחלקים ב-9.
הראו כי קיים מספר מביניהם המתחלק ב-9.
רמז לפתרון: $(0,0)$ $(8,1)$ $(7,2)$ $(6,3)$ $(5,4)$
4. נתונים 12 מספרים טבעיים דו-ספרתיים שונים.
הראו כי קיימים שני מספרים, שהפרשם הוא מספר בעל שתי ספרות זהות.
5. נתונים המספרים הטבעיים: $1, 2, \dots, 2n$
א. הראו כי ניתן לבחור n מספרים מביניהם כך, שלא קיים זוג מספרים, שהאחד מחלק את השני.
ב. הראו כי לכל בחירה של $n+1$ מספרים מביניהם קיים זוג מספרים, שהאחד מחלק את השני.
6. מהו המספר המינימלי, של זוגות תלמידים ילידי אותו חודש, בכיתה בת 31 תלמידים?
7. מהו המספר המינימלי של זוגות צופים, ילידי אותו יום בשנה, באולם המכיל 600 צופים?
8. נתונה קבוצת המספרים הטבעיים הקטנים מ- $2n$.
א. הראו כי ניתן לבחור מתוכם n מספרים כך, שלא קיימים שני מספרים שסכומם $2n$.
ב. הראו שלכל בחירה מתוכם של $n+1$ מספרים קיימים שני מספרים שסכומם $2n$.
9. נתונה קבוצה של n מספרים טבעיים.
הראו כי לכל מספר טבעי הקטן מ- n , ניתן למצוא שני מספרים מהקבוצה, שהפרשם מתחלק במספר הטבעי.
רמז לפתרון: ניתוח השאריות האפשריות.

10. על היקף מעגל סימנו 18 נקודות. ליד כל נקודה רשמו מספר טבעי כלשהו.
- א. הראו כי קיימת קשת, שסכום המספרים לאורכה מתחלק ב-18.
- ב. הראו כי קיימות 2 קשתות, שסכום המספרים לאורך כל אחת מהן, מתחלק ב-9.
- ג. הראו כי קיימות 3 קשתות, שסכום המספרים לאורך כל אחת מהן, מתחלק ב-6.
11. הראו כי לכל סדרה בת n מספרים טבעיים קיימת תת סדרה של איברים עוקבים, שסכומה מתחלק ב- n .
12. הראו כי עבור n טבעי, קיימת כפולה של n בעלת n ספרות לכל היותר, הבנויה מהספרות $0, x$.
(דוגמה: $n = 5$, $x = 4$, $44400 = 5 \cdot 8880$)
13. קבוצת מטיילים עברה 200 ק"מ במשך 10 ימים.
ביום הראשון והעשירי עברה 45 ק"מ. ביום השני והתשיעי עברה 30 ק"מ.
הראו שהיו 3 ימים רצופים, בהם עברו לפחות 60 ק"מ.

פתרונות

1. מבין המספרים הנתונים, ניתן לבחור לכל היותר n מספרים שונים, כך שההפרש בין כל שניים מהם הוא לפחות 2. בבחירה של $n + 1$ מספרים, חייב להיות זוג מספרים עוקבים.
מספרים עוקבים הם זרים.
2. נתבונן בזוגות הבאים, שסכומם מתחלק ב-9: $(0,0)$ $(8,1)$ $(7,2)$ $(6,3)$ $(5,4)$
לכל מספר מבין ה-6, שארית החלוקה ב-9 רשומה באחד מהזוגות. לפחות שתי שאריות רשומות באותו זוג.
אם הן שוות, הפרש המספרים מתחלק ב-9. אם הן שונות, סכום המספרים מתחלק ב-9.
4. נחלק את המספרים ב-11 ונקבל 12 שאריות. ישנם לפחות שני מספרים עם אותה שארית חלוקה.
הפרש מספרים אלו מתחלק ב-11. מספר דו-ספרתי שמתחלק ב-11, ספרותיו זהות.
5. א. המספרים הם: $n + 1, n + 2, \dots, 2n$
ב. ניתן להציג את המספרים בצורה $m \cdot 2^k$ כאשר m אי-זוגי. ישנם רק n מספרים אי-זוגיים.
לכן קיימים לפחות שני מספרים עם אותו m . לאחד מהם חזקה קטנה יותר של 2.
לכן הוא מחלק את האחר ללא שארית.

11. נתבונן בסכומים החלקיים:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

אם כל הסכומים לא מתחלקים ב- n , ישנם $n - 1$ שאריות שונות מאפס. לכן ישנם שני סכומים עם אותה שארית חלוקה. מהפרש הסכומים מתקבלת הסדרה המבוקשת.

$$j < i \Rightarrow S_i - S_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_i$$

12. רמז לפתרון:

$$\begin{array}{c} \overbrace{xx \dots xx}^{n+1} \\ xx \dots xx 0 \\ xx \dots xx 00 \end{array}$$

13. מייצגים את המרחקים שעברו בכל אחד מהימים. $a_1, a_2, \dots, a_{10}$

$$a_9 = 30 - a_2, \quad a_{10} = 45 - a_1$$

$b_1, b_2, \dots, b_8$ מייצגים את המרחקים שעברו בשלושה ימים רצופים, כלומר:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ b_2 &= a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ b_7 &= a_7 + a_8 + a_9 = a_7 + a_8 + (30 - a_2) \\ b_8 &= a_8 + a_9 + a_{10} = a_8 + (30 - a_2) + (45 - a_1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} (a_1 + a_2 + a_3) & \leftarrow & b_1 \\ + (a_2 + a_3 + a_4) & \leftarrow & b_2 \\ + (a_3 + a_4 + a_5) & \leftarrow & b_3 \\ \dots & & \dots \\ + (a_7 + a_8 + 30 - a_2) & \leftarrow & b_7 \\ + (a_8 + 30 - a_2 + 45 - a_1) & \leftarrow & b_8 \\ \hline = 3 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) - [2 \cdot a_1 + a_2 + 30 - a_2 + 2 \cdot (45 - a_1)] & = & \\ = 3 \cdot 200 - 120 & = & 480 \end{array}$$

$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_8 = 480$ אם סכום 8 מחוברים הוא 480, לא ייתכן שכולם קטנים מ-60.

כלומר לפחות אחד מהם הוא 60 או יותר, לכן ישנם 3 ימים עוקבים בהם טיילו לפחות 60 ק"מ.

משוואות דיופנטיות

דיופנטוס היה מתמטיקאי יווני שפעם במאה השלישית לערך באלכסנדריה שבמצרים. הוא עסק במשוואות או במערכות משוואות שקבוצת הפתרונות שלהן מספרים שלמים. לעיתים מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות.

דוגמאות

1. כאשר המורה נשאל מה גילו, הוא השיב בחידה: גילי הוא כפליים ממכפלת שתי הספרות המרכיבות אותי. בן כמה אני?

פתרון:

נסמן: a - ספרת העשרות $\{1, 2, \dots, 9\}$

b - ספרת היחידות $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

נפתור את המשוואה: $10a + b = 2ab$

$$b = 2ab - 10a$$

$$b = 2a(b - 5)$$

בשלב זה קל להבחין כי $b < 5$ וזוגי, והיות ו- a ו- b הן ספרות, לאחר בדיקת 2 אפשרויות נגיע למסקנה כי: $a = 3, b = 6$. ולכן גיל המורה הוא 36.

2. בקופה של תלמיד 80 מטבעות. חלקן בנות 10 אג', חלקן בנות 50 אג' וחלקן בנות 1 ש"ח. בסה"כ בקופה 12 ש"ח. כמה מטבעות מכל סוג?

פתרון:

$$\begin{cases} x + y + z = 80 \\ 10x + 50y + 100z = 1200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 80 \\ x + 5y + 10z = 120 \end{cases}$$

$$4y + 9z = 40$$

$$z = \frac{4(10 - y)}{9}$$

$10 - y$ חייב להתחלק ב-9, כי z היא ספרה, ולכן $y = 1$.

ומכאן על-ידי הצבה: $z = 4, y = 1, x = 75$

$$75 + 4 + 1 = 80 \quad \text{בדיקה:}$$

$$10 \cdot 75 + 1 \cdot 50 + 4 \cdot 100 = 1200$$

3. מצאו שלושה מספרים טבעיים שמכפלתם שווה לסכומם.

פתרון:

נניח כי x, y, z מספרים טבעיים, כך ש: $x \leq y \leq z$.

המשוואה היא: $x + y + z = x \cdot y \cdot z$.

אם נחלק את שני האגפים ב- $x \cdot y \cdot z$ נקבל: $\frac{1}{y \cdot z} + \frac{1}{x \cdot z} + \frac{1}{x \cdot y} = 1$

מהנ"ל נובע כי: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x \cdot y}$, כלומר: $x \cdot y \leq 3$.

x ו- y טבעיים ולכן $x = 1$, ו- y שווה ל-1, 2 או 3.

לאחר הצבה במשוואה המקורית נגיע למסקנה כי $y = 2$, ומיד לאחר מכן $z = 3$.

תשובה: $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

הערה: אם נבטל בשאלה זו את הדרישה שהמספרים יהיו טבעיים אזי קיימות תשובות נוספות:

$$(-1) + (-2) + (-3) = (-1)(-2)(-3)$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$(-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3})$$

4. מצאו שני מספרים טבעיים שהפרש ריבועיהם 323.

פתרון:

$$x^2 - y^2 = 323$$

$$(x + y)(x - y) = 323$$

נפרק את 323 למכפלת שני גורמים ונקבל: $323 = 19 \cdot 17$ או $323 = 323 \cdot 1$.

מסקנה: $(x + y)(x - y) = 323 \cdot 1$ או $(x + y)(x - y) = 17 \cdot 19$.

היות ו- x ו- y טבעיים נקבל:

$$\begin{cases} x + y = 323 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 19 \\ x - y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 162 \\ y = 161 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 18 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$162^2 - 161^2 = 323$$

$$18^2 - 1^2 = 323$$

בדיקה:

משוואות מיוחדות

1. מצא את כל ערכי x ו- y , כך שיקיימו: $xy + 1 = x + y$
2. נתון כי x, y, z הם מספרים טבעיים.
מצאו פתרון למשוואה:
$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$$
3. פתרו את המשוואה:
$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{18}{x^2 + 2x + 2} = \frac{18}{x^2 + 2x + 1}$$
4. פתרו את המשוואה:
$$x^2y - 3x^2 - 10xy + 25y + 30x - 75 = 0$$
5. מצאו פתרונות טבעיים למשוואה: $(x^2 - y^2)(x + y) = 675$
6. פתרו את המשוואה: $(7 - 4\sqrt{3})^x = 7 + 4\sqrt{3}$
7. פתרו את המשוואה: $|x - 2| + |x - 3| = 1$
8. פתרו את המשוואה:
$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$$
9. פתרו את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$$
10. פתרו את המשוואה הבאה:
$$x^2 + \frac{81x^2}{(9 + x)^2} = 40$$
11. מצאו את הפתרונות הממשיים של המשוואה:
$$(x^2 - x - 2)^4 + (2x + 1)^4 = (x^2 + x - 1)^4$$

פתרונות

1. סידור ופירוק לגורמים:

$$xy - x - y + 1 = 0$$

$$(x-1)(y-1) = 0$$

$$\boxed{x=1, y=1}$$

2.

$$\frac{10}{7} = 1\frac{3}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{2\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{matrix}}$$

3. נסמן למשל: $x^2 + 2x = a$

$$\frac{1}{a-3} + \frac{18}{a+2} = \frac{18}{a+1} \quad \text{המשוואה בסימון זה היא:}$$

ומכאן הפתרון פשוט.

4. נשתמש בפירוק לגורמים לפי קבוצות, ונקבל:

$$y(x^2 - 10x + 25) - 3(x^2 - 10x + 25) = 0$$

$$(x-5)^2(y-3) = 0$$

$\Downarrow$

$$\boxed{x=5, y=3}$$

$$(x-y)(x+y)^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 15^2 = 75 \cdot 3^2 = 27 \cdot 5^2 \quad .5$$

כיון ש- x ו- y הם מספרים טבעיים, הסכום צריך להיות גדול מהפרש, ולכן הפירוק היחיד האפשרי הוא:

$$(x-y)(x+y)^2 = 3 \cdot 15^2$$

פתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=15 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=9, y=6}$$

6. נשתמש בנוסחת הפירוק לגורמים: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$(7-4\sqrt{3}) \cdot (7+4\sqrt{3}) = 7^2 - (4\sqrt{3})^2 = 49 - 48 = 1 \quad \text{הרעיון הוא לראות ש:}$$

נכפול את שני האגפים ב- $7-4\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} (7-4\sqrt{3})^x &= 7+4\sqrt{3} \quad | \cdot (7-4\sqrt{3}) \\ (7-4\sqrt{3})^{x+1} &= 1 \Rightarrow x+1=0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x=-1}$$

7. תזכורת: אם $a \geq 0$ אז $|a| = a$, אם $a \leq 0$ אז $|a| = -a$.

$$(1) \quad x-2 \geq 0 \cap x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$|x-2| = x-2, \quad |x-3| = x-3$$

$$x-2 + x-3 = 1 \Rightarrow \underline{x=3}$$

$$(2) \quad x-2 \leq 0 \cap x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$|x-2| = -(x-2), \quad |x-3| = -(x-3)$$

$$-x+2 -x+3 = 1 \Rightarrow \underline{x=2}$$

$$(3) \quad x-2 \geq 0 \cap x-3 \leq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 3$$

$$|x-2| = x-2, \quad |x-3| = -(x-3)$$

$$x-2 -x+3 = 1 \Rightarrow 1=1 \Rightarrow \underline{2 \leq x \leq 3}$$

$$(4) \quad x-2 \leq 0 \cap x-3 \geq 0 \Rightarrow \phi$$

הפתרון הוא אחד של כל הפתרונות האפשריים: $\phi \cup 2 \leq x \leq 3 \cup x=2 \cup x=3$,

$$\text{לכן: } \boxed{2 \leq x \leq 3}$$

8. נסמן: $\sqrt{x-1} = a$, ומכאן: $x-1 = a^2$, כלומר: $x = a^2 + 1$.

$$\sqrt{a^2+4-4a} + \sqrt{a^2+9-6a} = 1 \quad \text{המשוואה בסימון זה היא:}$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = 1$$

$\Downarrow$

$$|a-2| + |a-3| = 1$$

ומכאן, בשיטת האינטרוואלים הפתרון פשוט ($x=5$, $x=10$)

9. נסמן: $x+y=a$, $xy=b$

המערכת המתקבלת בסימון היא: $\begin{cases} a+b=11 \\ a^2-b=19 \end{cases}$ ומכאן הפתרון פשוט.

10. נבטל מכנים ונבצע השלמה לריבוע

$$x^2(9+x)^2 + 81x^2 - 40(9+x)^2 = 0$$

$$[x(9+x) - 9x]^2 + 18x^2(9+x) - 40(9+x)^2 = 0$$

$$x^4 + 18x^2(9+x) - 40(9+x)^2 = 0$$

נבצע פירוק טרינום הסכום: 18, המכפלה: -40, הפירוק: +20, -2.

$$[x^2 + 20(9+x)][x^2 - 2(9+x)] = 0$$

ומכאן הפתרון פשוט.

11. נסמן: $a = x^2 - x - 2$

$$b = 2x + 1$$

$$\Downarrow$$

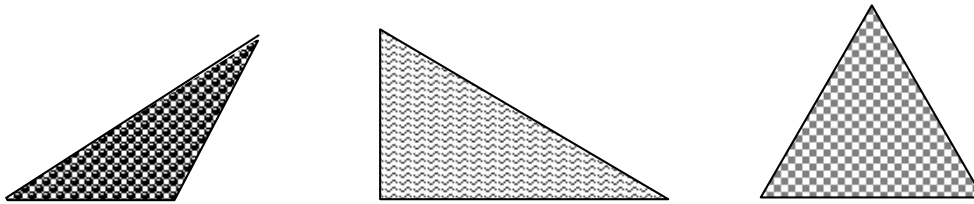
$$a + b = x^2 + x - 1$$

המשוואה בסימון היא: $a^4 + b^4 = (a+b)^4$

פתיחת סוגריים ופרוק לגורמים מוביל במהירות לפתרון.

פעילות בנושא "ריצופים"

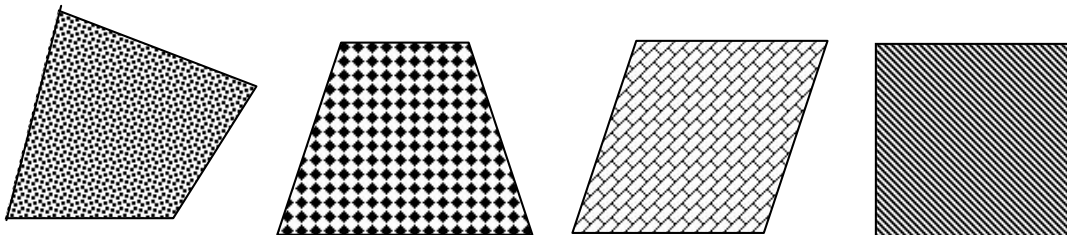
ריצוף משטח, הוא כיסוי המשטח על ידי תבניות של צורות, כך שלא ישארו חללים בין התבניות, ושצורה אחת לא תעלה על השניה.



1. א. נסו לרצף משטח בעזרת המשולשים שווי הצלעות. האם הדבר אפשרי?
- ב. נסו לרצף בעזרת המשולשים ישרי הזווית. האם הדבר אפשרי?
- ג. נסו לרצף בעזרת המשולשים קהי הזווית. האם הדבר אפשרי?

מסקנה:

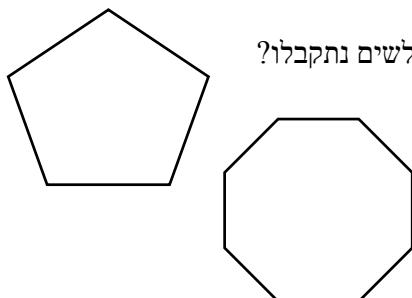
2. נסו לרצף משטח בעזרת מרובעים זהים. האם הדבר אפשרי בכל המקרים הבאים?



מסקנה:

ריצוף משוכלל, הוא ריצוף שבו משתמשים בסוג אחד בלבד של מצולע.
מצולע משוכלל, הוא מצולע שכל צלעותיו שוות, וכל זוויותיו שוות.
 בריצוף משתמשים לעתים קרובות בצורות שהן מצולעים משוכללים. גודל הזוויות של צורות אלה הוא הגורם העיקרי באפשרויות הריצוף.

חישוב מידת הזווית הפנימית של מצולע משוכלל:



3. א. במחומש המצויר העבירו אלכסונים מאחד הקדקודים. כמה משולשים נתקבלו?
- ב. מהו סכום הזוויות הפנימיות של המחומש?
- ג. מהי מידת הזווית של כל זווית פנימית במחומש המשוכלל?

4. חזרו על כל השלבים עבור מתומן משוכלל.

5. רשמו תבנית כללית לחישוב מידת הזווית הפנימית של מצולע משוכלל בעל n צלעות.

6. מלאו את הטבלה.

שם המצולע המשוכלל	מספר הצלעות	מידת הזווית הפנימית
משולש	3	60°
ריבוע		
מחומש		
משושה		
משובע		
מתומן		
מתושע		
מעושר		
תריסרון	12	

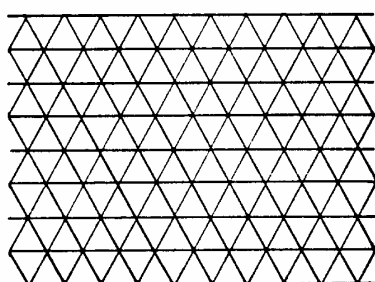
7. כמה משולשים שווי צלעות יכולים להיפגש בקדקודיהם סביב נקודה אחת?

כמה ריבועים יכולים להיפגש בקדקודיהם סביב נקודה אחת?

כמה מצולעים משוכללים זהים יכולים להיפגש בנקודה אחת (קודקוד)?

8. בעזרת אילו מצולעים ניתן לבצע ריצוף משוכלל?

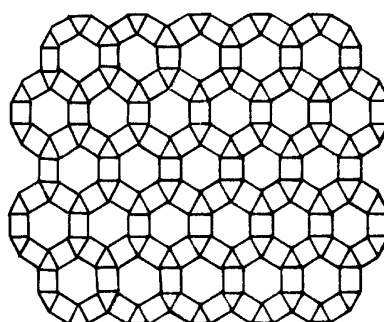
ריצוף חצי משוכלל הוא ריצוף שבו משתמשים בשניים או יותר סוגי מצולעים משוכללים, ובכל קודקוד קיים אותו סידור של הצורות.



ריצוף משוכלל:

הסידור בכל קודקוד

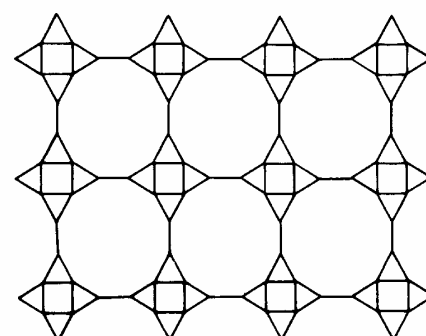
3.3.3.3.3.3



ריצוף חצי משוכלל:

הסידור בכל קודקוד

4.3.4.6



ריצוף שאינו משוכלל ואינו חצי משוכלל:

הסידור בחלק קדקודים – 4.3.12.3

הסידור בחלק אחר – 12.3.12

9. בכמה אופנים שונים אפשר לכסות רצפה במרצפות בצורת מצולעים משוכללים, כך שבכל קודקוד של מצולע יפגשו בדיוק שלושה מצולעים?

- א. מהו סכום הזוויות סביב כל קודקוד?
 ב. נניח שמספר הצלעות של מצולע אחד הוא a. מהי הזווית הפנימית שלו?
 נניח שמספר הצלעות של מצולע שני הוא b. מהי הזווית הפנימית שלו?
 נניח שמספר הצלעות של מצולע שלישי הוא c. מהי הזווית הפנימית שלו?
 ג. בטאו בעזרת a, b, c את סכום הזוויות הפנימיות הנ"ל. מצאו קשר בין a, b, c.
 ד. מהם המספרים המקיימים קשר זה?

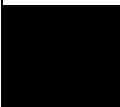
מסקנה: המצולעים הם:

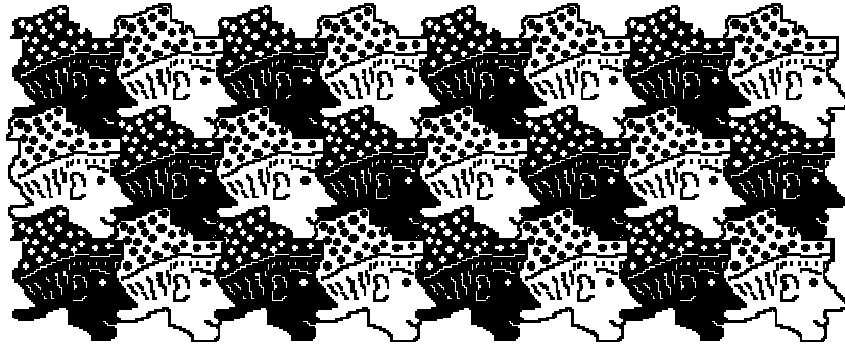
10. בכמה אופנים שונים אפשר לכסות רצפה במרצפות בצורת מצולעים משוכללים, כך שבכל קודקוד של מצולע יפגשו בדיוק ארבעה מצולעים?
 חזרו על כל השלבים שבשאלה הקודמת.
 מהם המצולעים האפשריים?

11. מלאו את הטבלה. העזרו בצורות ובנו את הריצופים כדי לבדוק את תשובותיכם.
 (המספרים המופיעים בטבלה מציינים את מספר הצלעות של המצולעים.)

מספר האפשרויות	המצולעים הנפגשים בקודקוד	תריסרון משוכלל 12(150°)	מתומן משוכלל 8(135°)	משושה משוכלל 6(120°)	ריבוע 4(90°)	משולש משוכלל 3(60°)
1	3/4/6/4	0	0	1	2	1
2	4/3/4/3/3	0	0	0		
3		0	0	0		
4		0		0		0
5		0	0		0	
6		0	0		0	
7			0			0
8			0	0	0	

השלבים לבניית ריצוף בצורה כלשהי

	א. ציירו ריבוע שחור
	ב. חתכו צורה מהצלע העליונה של הריבוע, עד לצלע התחתונה
	ג. הדביקו את החלק החתוך לצלע הנגדית
	ד. חזרו על תהליך החיתוך וההדבקה מהצלע השמאלית לימנית
	ה. קשטו את הצורה כרצונכם
	ו. העתיקו את הצורה פעם נוספת עם תזוזה מטה
	ז. הכינו צורת תשליל
	ח. הכינו צורות לריצוף והדביקו לסירוגין.



תשובות והשלמות

9. הזווית הפנימית של המצולע הראשון היא: $\frac{(a-2)180^\circ}{a}$, של המצולע השני: $\frac{(b-2)180^\circ}{b}$,

ושל המצולע השלישי: $\frac{(c-2)180^\circ}{c}$.

סכום הזוויות סביב קודקוד אחד הוא: $\frac{(a-2)180^\circ}{a} + \frac{(b-2)180^\circ}{b} + \frac{(c-2)180^\circ}{c} = 360^\circ$

לאחר צמצום ופישוט נקבל: $\frac{a}{a} - \frac{2}{a} + \frac{b}{b} - \frac{2}{b} + \frac{c}{c} - \frac{2}{c} = 2$, ולבסוף מקבלים: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$.

כלומר הפתרונות תלויים באפשרות להצגת השבר $\frac{1}{2}$ כסכום של שלושה שברי יחידה.

למשל:

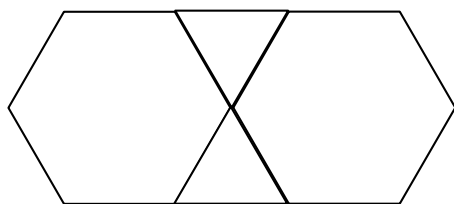
$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \right) \text{ (שלושה משושים)} \quad \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \right) \text{ (משולש ושני תריסרונים)}$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \right) \text{ (ריבוע, משושה ותריסרון)} \quad \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \right) \text{ (ריבוע, ושני מתומנים)}$$

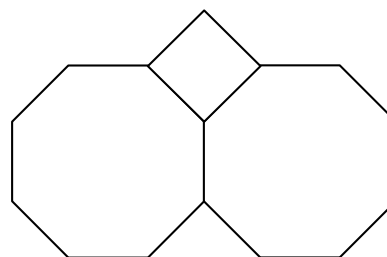
11.

מספר האפשרויות	המצולעים הנפגשים בקודקוד	תריסרון משוכלל 12(150°)	מתומן משוכלל 8(135°)	משושה משוכלל 6(120°)	ריבוע 4(90°)	משולש משוכלל 3(60°)
1	3/4/6/4	0	0	1	2	1
2	4/3/4/3/3	0	0	0	2	3
3	3/3/3/4/4	0	0	0	2	3
4	4/8/8	0	2	0	1	0
5	3/3/3/3/6	0	0	1	0	4
6	3/6/3/6	0	0	2	0	2
7	4/6/12	1	0	1	1	0
8	3/12/12	2	0	0	0	1

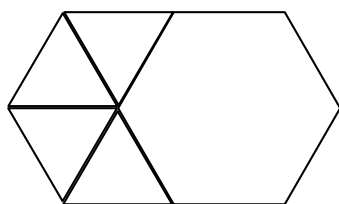
שמונה הצירופים של ריצופים חצי משוכללים



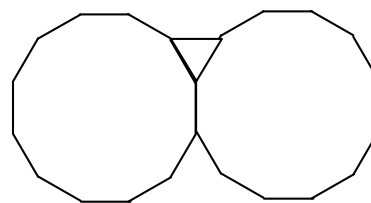
3/6/3/6



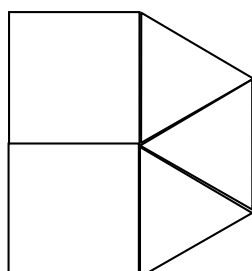
4/8/8



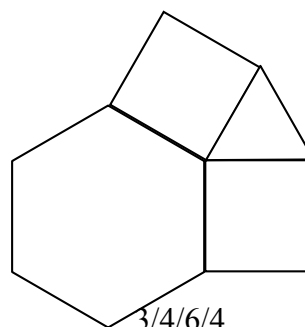
3/3/3/3/6



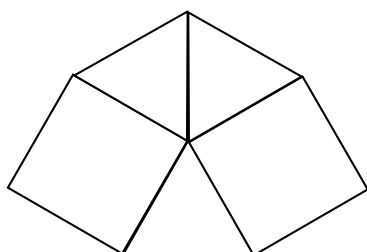
3/12/12



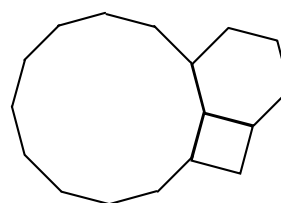
3/3/3/4/4



3/4/6/4

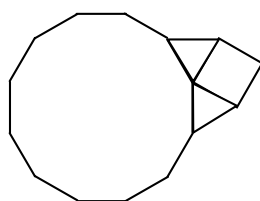


3/3/4/3/4

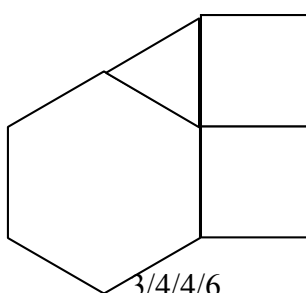


4/6/12

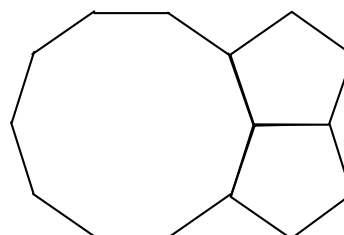
שימו לב: בשלושת הצירופים הבאים אמנם סכום הזוויות סביב קודקוד אחד הוא 360° , אך אין הם יכולים לכסות משטח.



3/4/3/12

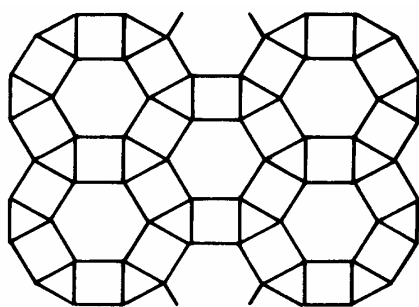


3/4/4/6

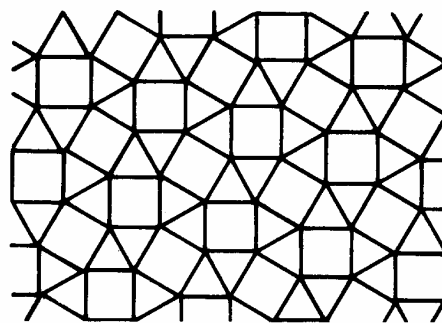


5/5/10

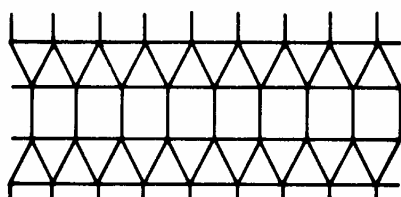
שמונה הריצופים החצי-משוכללים



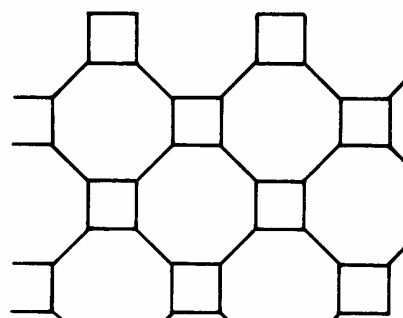
4.3.4.6



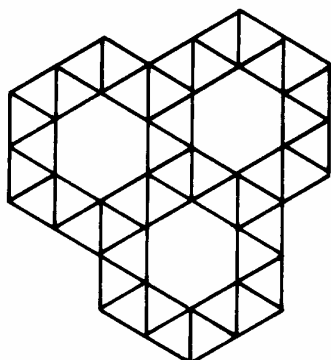
3.3.4.3.4



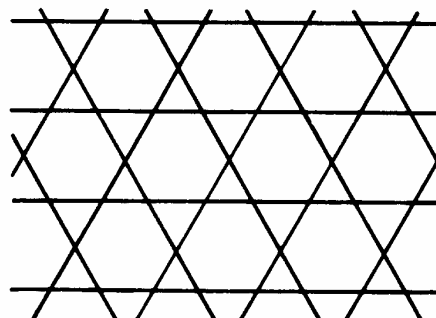
3.3.3.4.4



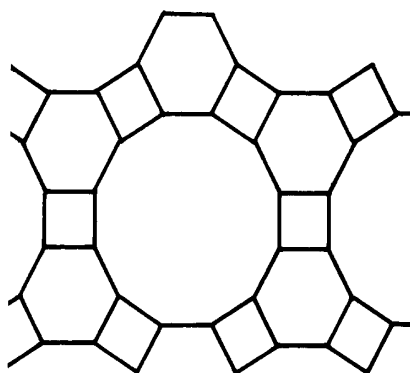
4.8.8



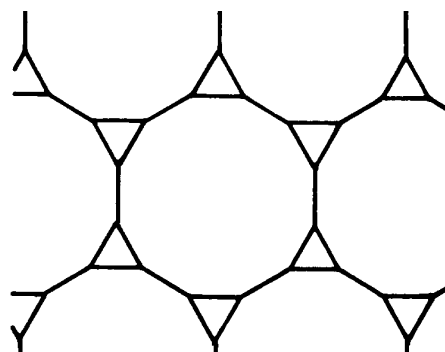
3.3.3.3.6



3.6.3.6

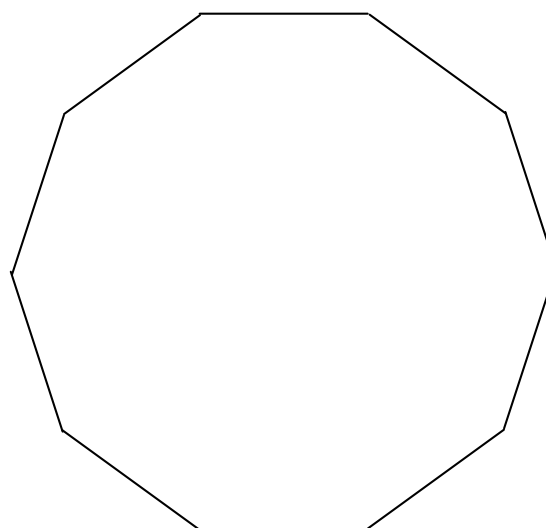
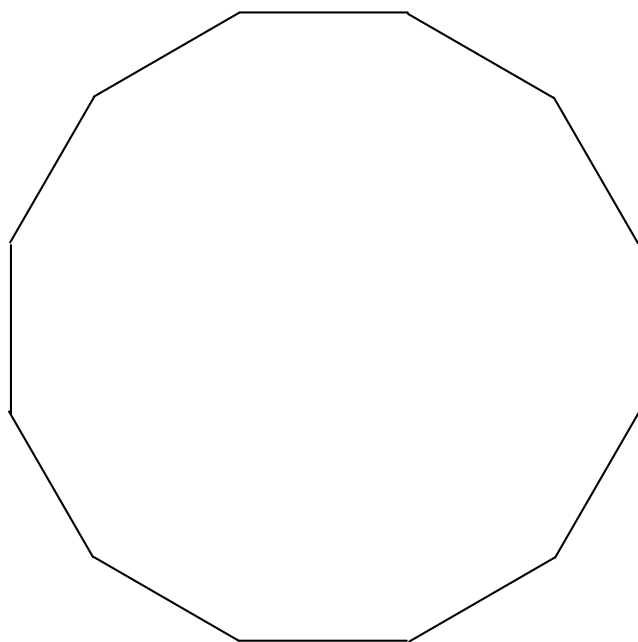
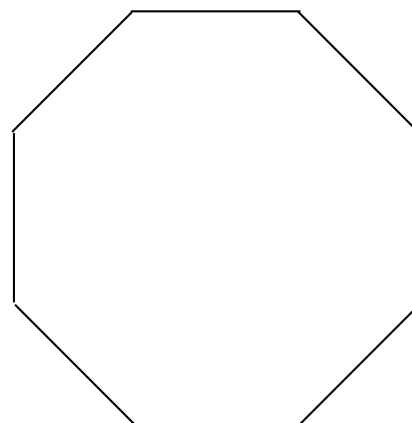
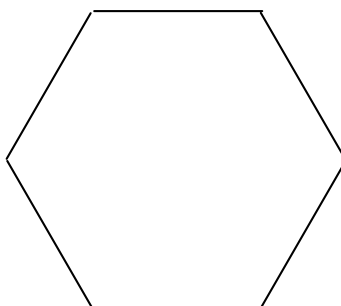
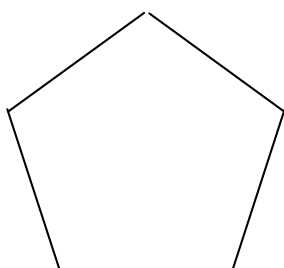
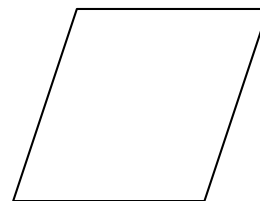
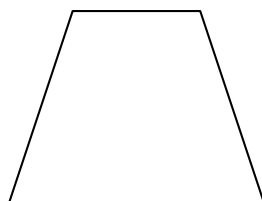
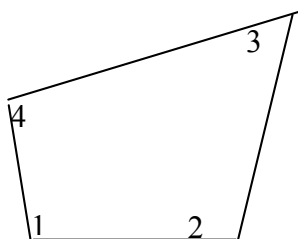
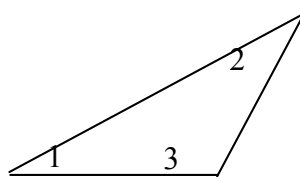
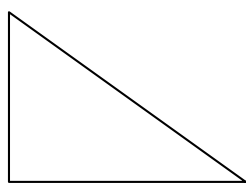
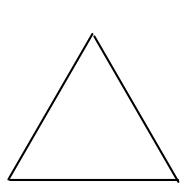


4.6.12



3.12.12

תבניות מצולעים לפרויקט ריצופים



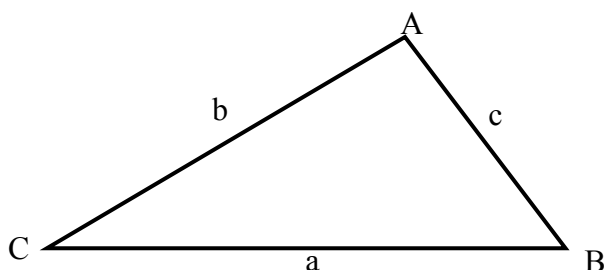
בעיות בניה באמצעות מחוגה וסרגל

בניות יסוד:

- (1) העתקת קטע, הכפלת קטע, חציית קטע.
- (2) העתקת זווית, הכפלת זווית, חציית זווית.
- (3) העברת אנך ומקביל לקטע נתון מנקודה נתונה.
- (4) חלוקת קטע נתון לשני קטעים לפי יחס נתון.

בתרגילי הבניה בעזרת סרגל ומחוגה עובדים לפי השלבים הבאים:

סקיצה של הצורה הנדרשת, סימון הנתונים, מציאת רעיון הבניה, ביצוע ורישום שלבי הבניה, הוכחה



סימונים מקובלים במשולש

A, B, C - קדקדי המשולש.

α, β, γ - זוויות המשולש

a, b, c - צלעות המשולש

h_a, h_b, h_c - גבהי המשולש

m_a, m_b, m_c - תיכוני המשולש

l_A, l_B, l_C - חוצי זוויות המשולש

R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש

r - רדיוס המעגל החסום במשולש

S - שטח המשולש

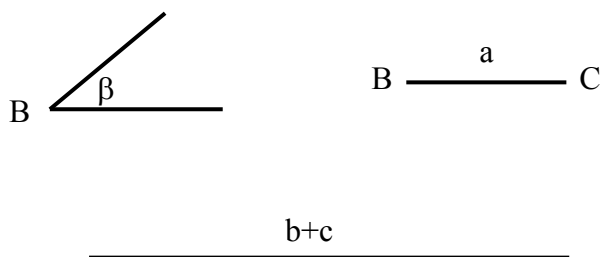
בעיה 1

בנו משולש עפ"י הנתונים:

1. צלע $BC = a$

2. זווית β

3. קטע $b+c$



שלבי הבנייה

א. העתקת צלע $BC = a$

ב. העתקת זווית β

ג. העתקת קטע $BD = b+c$

ד. העברת אנך אמצעי ל- CD (החותך את קטע BD בנקודה A)

ה. השלמת המשולש ABC ($AC = AD$ ולכן $BD = b+c$)

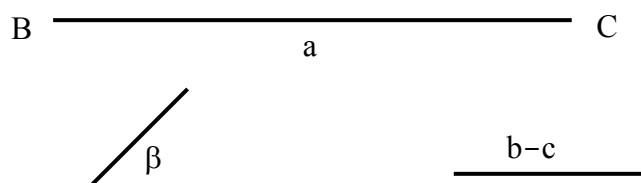
בעיה 2

בנו משולש עפ"י הנתונים:

1. צלע $BC = a$

2. זווית β

3. קטע $b-c$



שלבי הבנייה

א. העתקת צלע $BC = a$

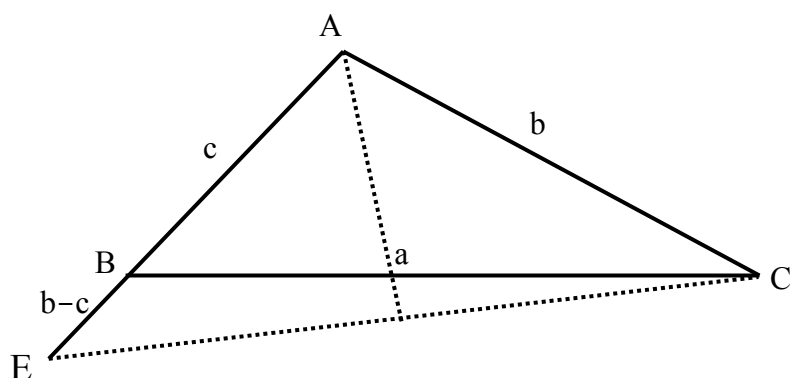
ב. העתקת זווית β

ג. העתקת קטע $BE = b-c$

ד. העברת אנך אמצעי ל- EC

ה. השלמת המשולש ABC

($AC = AE$ ולכן $BE = AC - AB$)



בפתרון בעיה זו וגם בבעיה הקודמת, השתמשנו במשפט הבא:

האנך האמצעי לקטע נתון הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור המרוחקות מקצות הקטע מרחקים שווים.

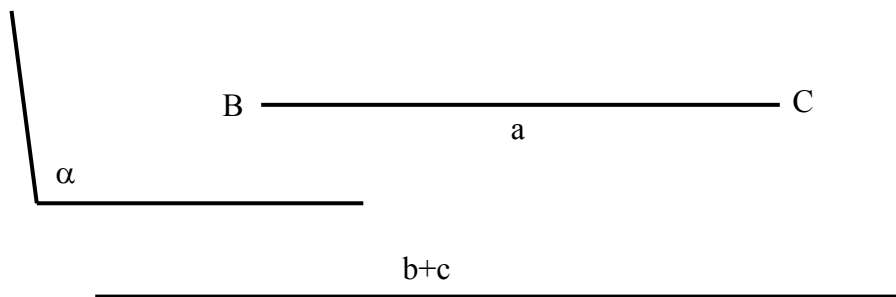
בעיה 3

בנו משולש עפ"י הנתונים:

1. צלע $BC = a$

2. זווית α

3. קטע $b+c$



שלבי הבנייה

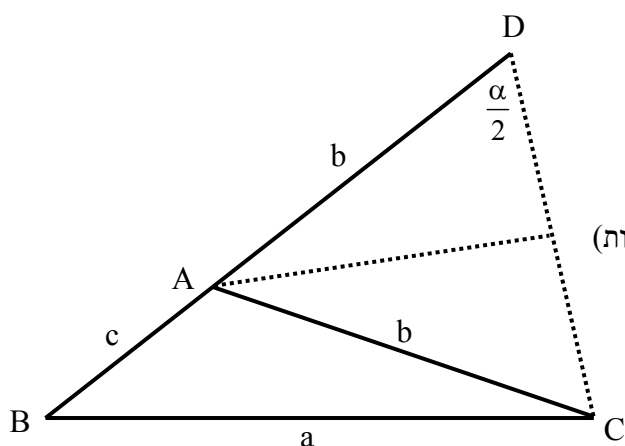
א. $BD = b + c$

ב. העתקת זווית $\frac{\alpha}{2}$ בנקודה D.

ג. $BC = a$ באמצעות מחוגה (יש להבחין בין שתי אפשרויות)

ד. העברת אנך אמצעי ל-CD

ה. השלמת המשולש: $AC = AD$ ולכן $BD = b+c$.



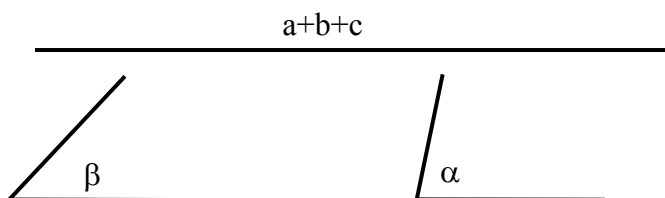
בעיה 4

בנו משולש עפ"י הנתונים:

1. קטע $a+b+c$

2. זווית α

3. זווית β



שלבי הבנייה

א. $DE = a+b+c$

ב. $\angle D = \frac{\alpha}{2}$

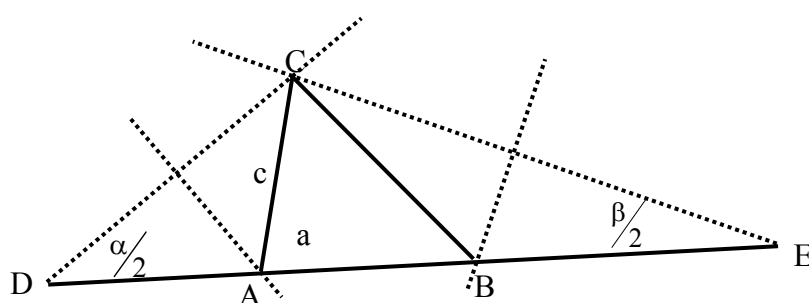
ג. $\angle E = \frac{\beta}{2}$

ד. אנך אמצעי ל-CD

ה. אנך אמצעי ל-CE

ו. השלמת המשולש ABC ($AD = AC$, $BC = BE$), לכן $p = a+b+c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$).

הערה: ניתן לפתור בעיה זו גם באמצעות משפט תאלס.

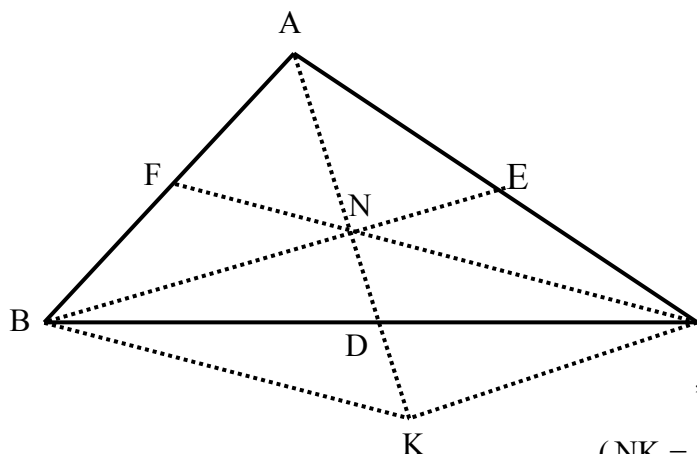


בעיה 5

בנו משולש ABC באמצעות אורכי שלושת התיכונים:

$$A \xrightarrow{m_a} D \quad B \xrightarrow{m_b} E \quad C \xrightarrow{m_c} F$$

שלבי הבנייה



א. קטע AK ועליו הנקודות D, N כך ש:

$$DK = \frac{1}{3}m_a, \quad ND = \frac{1}{3}m_a, \quad AN = \frac{2}{3}m_a$$

ב. באמצעות מחוגה $CK = \frac{2}{3}m_b$, $NC = \frac{2}{3}m_c$

ג. $CD = DB$

ד. השלמת המשולש ABC (המרובע NCKB מקבילית,

$$NK = \frac{2}{3}m_a, \quad NC = BK = \frac{2}{3}m_c, \quad BN = CK = \frac{2}{3}m_b$$

בפתרון בעיה זו השתמשנו במשפטים הבאים הקשורים לתיכוני משולש:

- * התיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.
- * כל שני תיכונים במשולש נחתכים ביחס 2:1 (החלק הארוך קרוב לקדקד).
- * שלושת התיכונים נחתכים בנקודה אחת.
- * שלושת התיכונים מחלקים את המשולש ל-6 משולשים שווי שטח.
- * נקודת חיתוך התיכונים היא מרכז הכובד הפיסיקלי של המשולש.

חלוקה לשברים חלקיים

פעולת החלוקה לשברים חלקיים תורמת רבות לפתרון בעיות במתמטיקה.
אם המכנה של שבר מתפרק לגורמים, ניתן לבדוק חלוקה לשברים חלקיים.
בכל חלוקה שכזאת, הפולינום במונה יהיה בחזקה אחת נמוכה יותר מהפולינום שבמכנה.

מקרה I - גורמים ליניאריים שונים

לכל גורם ליניארי מהצורה $ax+b$, המופיע פעם אחת במכנה של פונקציה רציונלית שלא ניתנת לצמצום, מתאימה

מנה חלקית מהצורה: $\frac{A}{ax+b}$.

$$\begin{aligned}\frac{5x-10}{x^2-3x-4} &= \frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \\ &= \frac{Ax+A+Bx-4B}{(x-4)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-4B}{(x-4)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-4B}{x^2-3x-4}\end{aligned}$$

מכאן, על-ידי השוואת המונים נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} A+B=5 \\ A-4B=-10 \end{cases} \Rightarrow A=2, B=3$$

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1} \quad \text{ומכאן שהפרוק הוא:}$$

ברור כי כל אחד מהשברים שהתקבלו פשוט בהרבה מהשבר הנתון.

מקרה II - גורם ריבועי בלתי פריק

לכל גורם ריבועי בלתי פריק מהצורה ax^2+bx+c המופיע פעם אחת במכנה של פונקציה רציונלית אמיתית,

מתאימה מנה חלקית מהצורה: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1} &= \frac{x^2+x-2}{(x^2+1)(3x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{3x-1} = \frac{(Ax+B)(3x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(3x-1)} = \\ &= \frac{3Ax^2-Ax+3Bx-B+Cx^2+C}{(x^2+1)(3x-1)} = \frac{(3A+C)x^2+(3B-A)x+C-B}{3x^3-x^2+3x-1}\end{aligned}$$

מכאן, על-ידי השוואת המונים, נקבל את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} 3A+C=1 \\ 3B-A=1 \\ C-B=-2 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=\frac{3}{5}, C=-\frac{7}{5}$$

$$\frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1} = \frac{\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} - \frac{\frac{7}{5}}{3x-1} = \frac{4x+3}{5(x^2+1)} - \frac{7}{5(3x-1)}$$

ומכאן שהפרוק הוא:

מקרה III - גורמים ליניאריים חוזרים

לכל גורם ליניארי מהצורה $ax+b$, המופיע n פעמים במכנה של פונקציה רציונלית אמיתית, מתאים סכום של n

$$\text{מנות חלקיות מהצורה: } \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{2x-1}{x^2-6x+9} = \frac{2x-1}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

$$2x-1 = A(x-3) + B \Rightarrow 2x-1 = Ax + (-3A+B) \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ -3A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow A=2, B=5$$

$$\frac{2x-1}{x^2-6x+9} = \frac{2}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}$$

מכאן שהפירוק הוא:

דוגמא :

פרוק זה מאפשר לנו להוכיח סכום טורים ללא שימוש באינדוקציה מתמטית.

כך למשל נמצא את סכום הטור הבא לכל $n \geq 3$ טבעי אי-זוגי:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{5}{(n-1)(n+1)} = \\ & = \frac{5}{2 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 4} + \frac{5}{2 \cdot 4} - \frac{5}{2 \cdot 6} + \frac{5}{2 \cdot 6} - \frac{5}{2 \cdot 8} + \dots + \frac{5}{2(n-1)} - \frac{5}{2(n+1)} = \\ & = \frac{5}{2 \cdot 2} - \frac{5}{2(n+1)} = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{5}{2} \left(\frac{n+1-2}{2(n+1)} \right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{n-1}{2(n+1)} = \frac{5(n-1)}{4(n+1)} \end{aligned}$$

תרגילים

פרקו לשברים חלקיים את השברים הבאים:

$$\frac{1}{x^2+3x-4} = \quad .3 \qquad \frac{5}{x^3-9x} = \quad .2 \qquad \frac{3x+1}{x^2+3x-10} = \quad .1$$

$$\frac{2x-3}{x^3-x^2} = \quad .6 \qquad \frac{1}{x^2+x-2} = \quad .5 \qquad \frac{11x+17}{2x^2+7x-4} = \quad .4$$

$$\frac{1-5x^2}{x^3(x^2+1)} = \quad .9 \qquad \frac{5x-5}{3x^2-8x-3} = \quad .8 \qquad \frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \quad .7$$

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \quad .12 \qquad \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2} = \quad .11 \qquad \frac{2x^2-9x-9}{x^3-9x} = \quad .10$$